

Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial

Departamento de Matemática Aplicada

Estudio analítico de Coupled Map Lattices débilmente acoplados

Tesis doctoral realizada por

Dolores Sotelo Herrera

Licenciada en Matemáticas

Dirigida por:

Jesús San Martín Moreno

Doctor en Ciencias

2009



Mod. Tribunal

Tribunal nombrado por el Magfco. y Excmo. Sr. Rector de la Universidad
Politécnica de Madrid, el día.....de.....de 200....

Presidente: _____

Vocal: _____

Vocal: _____

Vocal: _____

Secretario: _____

Suplente: _____

Suplente: _____

Realizado el acto de defensa y lectura de la Tesis el día.....de.....de 200.....
en la E.T.S./Facultad.....

EL PRESIDENTE

LOS VOCALES

EL SECRETARIO

Dedicatoria:

*A Jesús y Raquel que me
regalaron el tiempo.*

Agradecimientos

A riesgo de algún olvido, quisiera expresar mi agradecimiento a todas las personas que han contribuido para que esta tesis sea una realidad.

En primer lugar, me gustaría agradecer a mi director de tesis, Jesús San Martín, su gran ayuda, el tiempo dedicado, paciencia e interés que todos los días me ha brindado desde que comenzamos este trabajo.

Deseo expresar mi profundo agradecimiento a Lucía Cerrada, por su gran generosidad, su apoyo constante, su positividad, y la ayuda que me ha prestado.

También quisiera agradecer a Daniel Rodríguez Pérez su disponibilidad y su indispensable colaboración que siempre me ha ofrecido.

Agradecer a Carlos Antoranz, su gran experiencia y conocimiento que ha derivado en un valioso asesoramiento que sin duda ha contribuido a mejorar esta tesis.

De igual manera quisiera dar las gracias a mis compañeros de departamento y muy especialmente a Sagrario Alocén por su disposición y profesionalidad.

Por último a toda mi familia, destacando por un lado a mis padres por haber sido un gran referente de lucha y superación, y por otro a Jesús y Raquel por su comprensión, paciencia y confianza en mí, que durante todo este tiempo han tenido.

A todos nuevamente GRACIAS.

Índice general

Lista de símbolos	XIII
Resumen	XV
Abstract	XVII
1. INTRODUCCIÓN	1
2. MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS	5
3. SINCRONIZACIÓN PERIÓDICA Y CAÓTICA	9
3.1. CML con acoplamiento medio.	9
3.1.1. Estado sincronizado estacionario.	9
3.1.2. Estados sincronizados periódicos.	13
3.1.3. Estados sincronizados caóticos.	22
3.1.4. Cascada de duplicación de periodo	24
3.1.5. Un teorema de no existencia	24
3.2. CML con acoplamiento a primeros vecinos.	27
3.2.1. Estados sincronizado estacionario	27
3.2.2. Estados sincronizados periódicos.	31
3.2.3. Estados sincronizados caóticos	37
3.2.4. Cascada de duplicación de periodo	38

3.2.5. Un teorema de no existencia	38
4. ONDAS VIAJERAS	43
4.1. El álgebra del sistema	44
4.2. CML con acoplamiento medio	47
4.2.1. Teorema 2. Ondas viajeras.	47
4.2.2. Cascada de duplicación de periodo	52
4.3. CML con acoplamiento a primeros vecinos.	61
4.3.1. Teorema 5. Ondas viajeras.	61
4.3.2. Cascada de duplicación de periodo.	63
5. FORMULAS DE RECURRENCIA	69
5.1. CML con acoplamiento de campo medio.	69
5.1.1. Fórmula de recurrencia.	70
5.1.2. Onda periódica	74
5.2. CML con acoplamiento a primeros vecinos	76
5.2.1. Fórmula de recurrencia	76
5.2.2. Onda periódica	80
6. CLUSTER EN COUPLED MAP LATTICE	83
6.1. Onda viajera en cluster de tipo I.	85
6.1.1. Onda viajera en cluster tipo I con acoplamiento medio	85
6.1.1.1. Teorema 1. Onda viajera.	85
6.1.1.2. Cascada de duplicación de periodo en cluster	88
6.1.2. Onda viajera en cluster tipo I con acoplamiento a primeros vecinos	93
6.1.2.1. Teorema de no existencia.	93
6.2. Onda viajera en cluster de tipo II.	96
6.2.1. Onda viajera en cluster tipo II con acoplamiento medio.	96

6.2.1.1.	Teorema 5. Onda viajera.	96
6.2.1.2.	Cascada de duplicación de periodo en cluster	99
6.2.2.	Onda viajera en cluster tipo II con acoplamiento a primeros vecinos.	103
6.2.2.1.	Teorema 8. Onda viajera.	103
6.2.2.2.	Cascada de duplicación de periodo en cluster	105
7.	ONDAS DE LA CASCADA SADDLE-NODE	109
7.1.	Ondas S-N en un CML con acoplamiento medio	109
7.2.	Ondas de la cascada de bifurcación S-N	116
7.3.	Ondas S-N, CML, acoplamiento primeros vecinos	134
7.4.	Ondas asociadas a la cascada de bifurcación S-N	138
8.	CONCLUSIONES	151
9.	OTRAS PERSPECTIVAS	153
	Bibliografía	161

Índice de figuras

3.1.	Estado sincronizado estacionario de un CML con $f(x; r) = rx(1 - x)$; $r = 1,0$; $\alpha = 0,1$.	11
3.2.	Estado sincronizado de periodo dos. $r = 3,2$, f y α iguales que en la figura 3.1. . . .	14
3.3.	Estado sincronizado de periodo cuatro. $r = 3,4985$; f y α iguales que en la figura 3.1.	18
3.4.	Estado sincronizado caótico. $r = 3,9$; f y α iguales que en la figura 3.1.	23
4.1.	Onda viajera de periodo 4 del CML con $r = 3,55464$;	51
4.2.	Onda viajera de periodo 8 del CML con $r = 3,566667$;	52
7.1.	Órbita de periodo 3. Primer elemento de la cascada de bifurcaciones S-N con periodo básico $q=3$	111
7.2.	Órbita de periodo $3 \cdot 2$. Segundo elemento de la CBS-N con periodo básico $q = 3$. Se observa como la órbita de periodo 3, (ver figura 7.1) se reproduce en 2 extremos. .	117
7.3.	Órbita de periodo $3 \cdot 2^2$. Tercer elemento de la CBS-N con periodo básico $q = 3$. Se observa como la órbita de periodo 3, (ver figura 7.1) se reproduce en 2^2 extremos.	117
7.4.	Órbita de periodo $3 \cdot 2^3$. Cuarto elemento de la CBS-N con periodo básico $q = 3$. Se observa como la órbita de periodo 3, (ver figura 7.1) se reproduce en 2^3 extremos.	118

Lista de símbolos

$X_i(n)$	Oscilador i -ésimo en el instante n
f	Función que determina la dinámica individual de cada oscilador
f^p	f compuesta consigo misma p -veces
α	Término de acoplamiento
ε	Término de perturbación
$\left(\frac{\partial X_i(n)}{\partial X_j(n)}\right)$	Matriz jacobiana
x^*	Punto fijo de f
x_i^*	Punto fijo de f^p
$\overset{m}{(x_j^*, \dots, x_j^*)}$	Estado sincronizado del CML
$\{x_1^*, \dots, x_p^*\}$	Órbita de periodo p de f
A_k	Coefficiente de la perturbación
$\left\{x_{i,2^k}^*\right\}$	Punto de la órbita de f de periodo 2^k
$\overset{\bullet}{p}$	Múltiplo de p
$\{X_i^\nu(n)\}$	Oscilador situado en el grupo ν y en la posición i
C	Punto crítico de la función unimodal f

Resumen

Hay muchos sistemas cuyo comportamiento global depende tanto del comportamiento individual de cada elemento del sistema, como de la interacción entre todos ellos. Estos sistemas son tan variados que son muy difíciles de tratar. Una manera de resolver estos problemas es por medio de *Coupled Map Lattice*,¹ que consisten en un sistema de ecuaciones acopladas cuya variable de estado es continua pero las variables espacio-temporales son discretas. Los CML se utilizan para modelar sistemas en las más diversas ciencias: física, química, ingeniería, economía, sociología, biología, y son un tema de investigación actual en los que se han obtenido muchos e importantes resultados numéricos, entre otros, ondas viajeras, sincronización, estructuras², cascada de duplicación de periodo. La abundancia de resultados numéricos y la carencia de resultados teóricos nos han hecho plantearnos la descripción analítica de dichos fenómenos en un contexto general, sin estar limitados por funciones particulares, tipo de acoplamiento o el número de elementos constituyentes del sistema. Tal planteamiento lo abordaremos en esta tesis, para CML débilmente acoplados con tres características relevantes:

1. La dinámica individual de cada elemento del sistema está gobernada por una función totalmente arbitraria, que cumpla ser de clase C^2 .
2. El número de elementos del CML es arbitrario.
3. El acoplamiento se ha estudiado tanto para primeros vecinos como para acoplamiento de

¹A partir de ahora utilizaremos las siglas más usuales de CML

²A partir de ahora utilizaremos la terminología más usual, en la literatura científica, de *patterns*.

campo medio.

Este tratamiento general permite por un lado que se empleen las herramientas del análisis matemático sobre todos los resultados, allá donde el investigador lo necesite; y por otro, que los resultados sean útiles en todos los sistemas modelados por CML, independientemente de la ciencia subyacente (ciencias naturales, sociales o ingeniería). En particular, se ha probado la existencia, y se ha aportado la expresión analítica, de ondas viajeras, agrupaciones ³, formación de patterns, así como sus cascadas de duplicación de periodo: fenómenos que mayoritariamente aparecen en los trabajos numéricos con CML. Igualmente, se ha probado la existencia y obtenido la expresión analítica de ondas viajeras asociadas a la cascada de bifurcaciones saddle-node, un fenómeno ni observado numéricamente ni predicho teóricamente con anterioridad.

³Cluster en inglés, a partir de este punto y por ser habitual en la literatura científica, mantendremos el termino de cluster en lugar de la traducción castellana)

Abstract

There are many systems whose global behaviors depend on both individual behavior of the elements as the interaction among them. The understanding of such system is extraordinarily complicated, because there are no particular mathematical tools developed to study them. One way to confront this problem is by using Coupled Map Lattices (CML); a system of coupled equations whose spatial and temporal variables are discretized but state variable remains continuous. CML are extensively studied and used in modeling an extraordinary variety of sciences; physics, chemistry, biology, engineering, economy, sociology. There are many and significant numerical results in CML; traveling waves, synchronization, patterns, period doubling cascades, but very few theoretical results. The abundance of numerical results and the lack of theoretical results led us to seek the analytical description of such phenomena in an overall framework without the constraints of particular function, kind of coupling or number of components of the system. This approach is discussed in this thesis, for weakly coupling CML, with three remarkable characteristics:

1. The individual dynamics of the elements of the CML are ruled by a totally arbitrary C^2 function.
2. The number of the elements of the CML is arbitrary.
3. Coupling, among elements, has been studied both in the nearest neighbor and in the mean field approximations.

This overall approach allows on one hand to use analytical tools where researchers need them and on the other hand results are useful for all CML irrespective of the underlying branch of science (natural

sciences, social sciences or engineering). In particular, analytical results have been obtained and proved for traveling waves, pattern formation, clustering, and furthermore their respective period doubling cascades: phenomena mainly communicated in numerical works with CML. In the same way, the analytical expression for traveling ways associated with the saddle-node bifurcations cascade has been obtained and proved, a new phenomenon not numerically observed neither theoretically anticipated.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Los sistemas que muestran patterns como consecuencia de la interacción entre sus diversos componentes son muy frecuentes en cualquier campo que se pueda imaginar: la actividad neuronal de nuestro cerebro [15, 47], el funcionamiento de los órganos del cuerpo como un todo [32, 72], el tráfico en una autopista [45], las aves volando en grupo [34, 74], una red de ordenadores [31, 70], los átomos en una cavidad láser [29], etc.

La interacción de los elementos individuales genera estructuras que se manifiestan en el sistema como un todo, y son responsables de fenómenos no comprendidos en su totalidad, hoy en día. En estos procesos se deben considerar dos elementos: el comportamiento de cada individuo (si pensamos en el ejemplo del tráfico encontraríamos que cada conductor tiene una manera particular de conducir) y la interacción entre ellos (no es lo mismo moverse por una autopista con pocos coches, donde la conducción la determinamos nosotros o hacerlo en un atasco, donde esencialmente el tráfico determina nuestro comportamiento).

La comprensión de tales sistemas es extraordinariamente complicada, ya que no se disponen de herramientas matemáticas para abordarlos. Una manera de encarar este problema es discretizar las variables espaciales y temporales y fijar algún tipo de interacción y de dinámica individual. El

resultado es una cadena de elementos acoplados (llamados osciladores), cada uno de ellos situados en un punto discreto de una red en instantes discretos, y cuya dinámica individual está gobernada por una aplicación continua.

A pesar de que las variables espaciales y temporales son discretas, las variables de estado pueden tomar cualquier valor. El conjunto resultante de osciladores acoplados en una red espacio-temporal discreta recibe el nombre de Coupled Map Lattice (CML).

Los CML tienen su origen en un trabajo previo de Turing sobre morfogénesis [76]. Posteriormente fueron estudiados intensivamente por Kaneko y sus colaboradores [35–39]. Desde sus inicios se han mostrado adecuados para modelar sistemas espacio-temporales. Su uso se ha extendido por diversas ramas científicas y su ámbito de aplicación es extraordinariamente variado y desde sus comienzos se encuentran en modelos: físicos [26, 80], biológicos [16, 40, 41], químicos [52, 61], sociales [8, 73] (véanse los números especiales [1, 2] para más detalle), o propios de la ingeniería [30], por citar algunos. Como hemos descrito más arriba, los CML se pueden utilizar para modelar sistemas con interacción entre sus elementos, por lo tanto era de esperar que su uso estuviera muy extendido.

Una evolución típica de un CML [43], con m osciladores, está dada por

$$X_i(n+1) = (1-\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha}{m} \sum_{j=1}^m f(X_j(n))$$
$$i = 1, \dots, m$$

donde $X_i(n)$ representa el estado de cada oscilador situado en la posición “ i ” de la red, en el instante “ n ”. El parámetro α “pesa” el acoplamiento entre osciladores. Dependiendo del valor de α , el comportamiento cambia de una evolución individual para cada oscilador (para $\alpha = 0$) hasta un enfoque de campo medio (para $\alpha = 1$). Para valores intermedios $0 < \alpha < 1$ el sistema está gobernado tanto por comportamientos globales como locales. Si α es muy pequeño diremos que el CML está débilmente acoplado.

Algunas veces se toma el termino de acoplamiento como

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f(X_j(n))$$

(campo medio), y en otros casos queda reducido a

$$\frac{1}{2}[f(X_{j-1}(n)) + f(X_{j+1}(n))]$$

(acoplamiento a primeros vecinos). Sin embargo esta última descripción no es adecuada cuando se trabaja en el espacio de parámetros cerca del punto de bifurcación, ya que no trata adecuadamente este fenómeno [12]. Puede haber distintas funciones peso en los términos de acoplamiento descritos, pero ello no modifica la idea básica de acoplamiento a todos o a primeros vecinos. De la misma manera, se puede introducir un acoplamiento a un número dado de vecinos, y a su vez la intensidad de la interacción con cada uno de ellos puede tener un peso diferente.

Otro punto importante que debemos considerar es la actualización de los osciladores; ellos pueden ser síncronos (todos los osciladores se actualizan simultáneamente), o asíncronos (actualizados uno cada vez) [6, 56]. Elegir uno u otro depende de si los osciladores se comunican entre ellos más rápido que la actualización del sistema como un todo. En los CML que describen sistemas físicos, donde la interacción entre los elementos (osciladores) normalmente se produce a una velocidad instantánea, lo más adecuado es utilizar CML síncronos. Por el contrario, los CML que describen sistemas biológicos o sociales (pensemos en los coches a la hora de frenar) serán frecuentemente de tipo asíncrono. Ello no quiere decir que no se vayan a encontrar CML asíncronos en los primeros ni síncronos en los segundos.

El ejemplo del tráfico, comentado anteriormente, nos muestra una serie de comportamientos con los que estamos muy familiarizados, y que a su vez se describen en la literatura científica cuando tratan CML. En esos comportamientos encontramos:

- Las parejas de coches que nos adelantan en la autopista, y que parecen estuvieran unidos rígidamente. A veces se agrupan más de dos coches. Vemos claramente un estado sincronizado regular.
- Esos frenazos repentinos y aceleraciones bruscas, para volver a frenar todos. Nos recuerda a un acordeón un tanto irregular. Nos hemos sincronizado caóticamente.
- Por la noche, es fácil ver, mirando las luces de frenado, como se propaga una onda.

Ondas, sincronización regular y caótica, patterns, duplicación de periodo [1, 2, 43] se han observado en multitud de CML.

Dado que el modelado, donde se han usado extensivamente los CML, recurre al uso de ordenadores, la mayoría de los resultados son numéricos, pero hay una gran pobreza de resultados teóricos con carácter general. Nos vamos a basar en este hecho para motivar el desarrollo de esta tesis y sus objetivos.

Capítulo 2

MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS

En la literatura científica, la inmensa mayoría de los resultados en CML son numéricos, apenas algunos son teóricos [5, 6, 46, 49]. Ello se debe a la dificultad del tratamiento analítico del problema. Existe una asombrosa riqueza de resultados numéricos que desgraciadamente está restringida a un conjunto fijo y finito de valores de parámetros, y a un número finito de osciladores en el CML. Esto supone una limitación para la adecuada comprensión de algunos fenómenos. En particular, la transición al caos por duplicación de periodo [20, 21] necesita que este tienda a infinito, y su tratamiento no es abordable numéricamente. También es necesario que el número de osciladores tienda a infinito, en una región finita, para la comprensión de la transición a la turbulencia en fluidos y plasmas; nuevamente el problema no es abordable numéricamente. Por lo tanto, es conveniente tener demostraciones matemáticas analíticas para caracterizar ciertos problemas, así como para dar validez general a diversos comportamientos del sistema: los estados sincronizados, las ondas viajeras, y sus bifurcaciones, existencia de patterns, etc.

El objetivo de este trabajo es soportar analíticamente los comportamientos más importantes en CML débilmente acoplados, que se han encontrado numéricamente. De esta forma los resultados adquirirán un carácter general. Asimismo se determinará para que conjunto de parámetros tales comportamientos son válidos. En particular se demostrará analíticamente la existencia, en CML,

de estados sincronizados estacionarios y ondas viajeras, fenómenos algunos de ellos ya observados numéricamente. Se probará que hay patterns que sufren una cascada de duplicación de periodo ¹ conforme lo hace la función f en el CML, donde f determina la dinámica individual. Estos comportamientos se caracterizarán completamente, dando expresiones analíticas de la evolución temporal de cada oscilador.

Los puntos fijos del CML, generados en las cascadas de duplicación, serán esencialmente los puntos fijos de f^{m2^k} (m número de osciladores del CML). Lo que se mostrará es como emergen propiedades globales del CML desde las propiedades particulares de los osciladores.

Se ha pretendido conseguir la máxima generalización en los resultados, para ello en los teoremas se ha usado una función arbitraria $f(x; r) \in C^2$, en vez de trabajar con la ecuación logística como es usual.

Se utilizarán métodos perturbativos para obtener las soluciones analíticas. La inversión de matrices funcionales de tamaño arbitrario es clave en la demostración de los teoremas.

Expresamente nuestros objetivos se plasmarán en los siguientes resultados acerca de los CML: Para estados sincronizados se estudiará la existencia de estados sincronizados estacionarios, de sincronización periódica, la CDP en la sincronización periódica y la existencia de sincronización caótica.

Centrándonos en CML débilmente acoplados, tanto con acoplamiento medio como con acoplamiento a primeros vecinos, se estudiará la existencia de ondas viajeras, la duplicación de periodo y su cascada.

Se dará la expresión analítica de todas las soluciones cuya existencia se pruebe, siempre en forma explícita, a la que algunas veces se añadirá una expresión en forma de recurrencia.

Otro objetivo es generalizar los resultados anteriores a cluster y demostrar en los mismos tanto la existencia de ondas viajeras como su duplicación de periodo y su cascada.

¹ A partir de ahora utilizaremos las siglas CDP

El proceso anterior está asociado a la CDP, buscaremos los mismos objetivos para la cascada de bifurcación saddle-node ² y de esta forma tener cubierta toda la dinámica de sistemas asociados a los dos tipos de cascada que se plantean en los sistemas dinámicos unidimensionales: la CDP y la CBS-N. En resumen, dotar de un marco general y analítico a la mayoría de los resultados numéricos observados en CML.

²A partir de ahora utilizaremos las siglas CBS-N.

Capítulo 3

SINCRONIZACIÓN PERIÓDICA Y CAÓTICA

En este capítulo se va a trabajar con CML sincronizados [13, 14, 42, 77], esto es, todos los osciladores tienen el mismo valor al mismo tiempo. Éste es un comportamiento especialmente llamativo, en particular cuando se produce la sincronización caótica [53, 65, 69], ya que los sistemas caóticos son muy sensibles a las perturbaciones y cabría esperar que cualquier ligera modificación generada por el acoplamiento de los osciladores del CML destruyera la sincronización.

Los resultados que se van a obtener en este capítulo corresponden primero al estudio de CML con acoplamiento de campo medio y posteriormente a CML con acoplamiento a primeros vecinos.

3.1. CML con acoplamiento medio.

3.1.1. Estado sincronizado estacionario.

La primera sincronización que vamos a estudiar es la estacionaria, es decir, los osciladores no cambian con el tiempo.

Teorema 1

Sea el CML con m osciladores:

$$X_i(n+1) = (1-\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha}{m} \sum_{i=1}^m f(X_i(n)) \quad i = 1 \cdots m \quad (3.1)$$

siendo α el parámetro del acoplamiento y $f(x) \in C^1$ una función unimodal que depende de un parámetro r .

El CML dado por (3.1)

i) Presenta un estado sincronizado estacionario que viene dado por $X^* = (x^*, \dots, x^*)^{(m)}$ donde $f(x^*) = x^*$.

ii) El estado sincronizado estacionario $X^* = (x^*, \dots, x^*)^{(m)}$ presenta la misma estabilidad que el punto fijo x^* de la función f .

Demostración

i) Si la función $f(x)$ tiene un punto fijo en x^* entonces $X^* = (x^*, \dots, x^*)^{(m)}$ será un punto fijo del sistema dado por (3.1), ya que si

$$X_i(n) = x^* \quad i = 1, \dots, m$$

resulta

$$f(X_i(n)) = f(x^*) = x^* = X_i(n) \quad i = 1, \dots, m$$

y

$$X_i(n+1) = (1-\alpha)f(x^*) + \frac{\alpha}{m} \sum_{i=1}^m f(x^*) = f(x^*) = x^* \\ i = 1, \dots, m$$

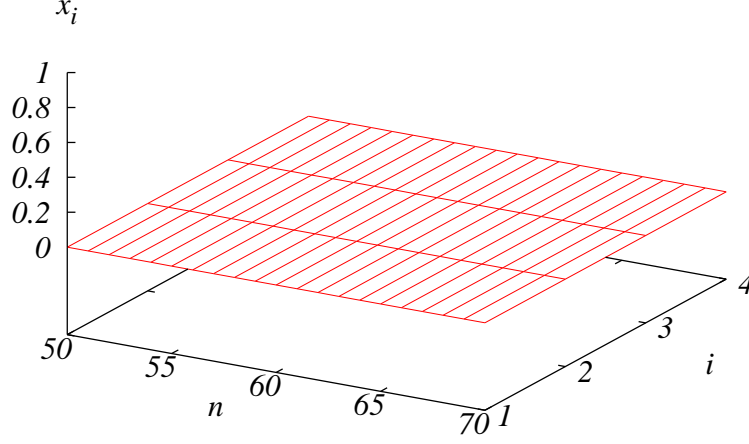


Figura 3.1: Estado sincronizado estacionario de un CML con $f(x; r) = rx(1 - x)$; $r = 1, 0$; $\alpha = 0, 1$.

Por lo tanto

$$X = (x^*, \overset{m}{x^*}, \dots, x^*) \quad (3.2)$$

es un estado sincronizado estacionario del sistema (ver figura 3.1) tal y como se quería probar.

ii) Pasemos a estudiar la estabilidad lineal de los puntos fijos, para ello calculemos los autovalores de la matriz jacobiana en esos puntos.

Los elementos de la matriz jacobiana vienen dados por

$$\frac{\partial X_i(n+1)}{\partial X_j(n)} = \begin{cases} (1 - \frac{m-1}{m}\alpha)f'(X_i(n)) & i = j \\ \frac{\alpha}{m}f'(X_j(n)) & i \neq j \end{cases} = \begin{cases} (1 - \frac{m-1}{m}\alpha)f'(x^*) & i = j \\ \frac{\alpha}{m}f'(x^*) & i \neq j \end{cases}$$

que evaluados en el punto fijo X^* resulta

$$\left. \frac{\partial X_i(n+1)}{\partial X_j(n)} \right|_{X^*} = \begin{cases} (1 - \frac{m-1}{m}\alpha)f'(x^*) & i = j \\ \frac{\alpha}{m}f'(x^*) & i \neq j \end{cases}$$

es decir, la matriz que resulta es

$$\left(\frac{\partial X_i(n+1)}{\partial X_j(n)} \right)_{X^*} = \begin{pmatrix} (1 - \frac{m-1}{m}\alpha) & \frac{\alpha}{m} & \cdots & \frac{\alpha}{m} \\ \frac{\alpha}{m} & (1 - \frac{m-1}{m}\alpha) & \cdots & \frac{\alpha}{m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha}{m} & \frac{\alpha}{m} & \cdots & (1 - \frac{m-1}{m}\alpha) \end{pmatrix} f'(x^*)$$

Esta matriz es simétrica, por lo tanto es estrictamente diagonalizable y sus autovalores serán reales.

Obsérvese que si restamos a cada elemento de la diagonal el término $(1 - \alpha)f'(x^*)$ se obtiene una matriz con todas las filas iguales, es decir, una matriz de rango uno, lo que implica que $(1 - \alpha)f'(x^*)$ es un autovalor de multiplicidad $m - 1$. El otro autovalor es simple y su valor se deduce a través de la traza.

En función de lo dicho, los autovalores de la matriz jacobiana son

$$\begin{cases} \lambda = f'(x^*) & \text{simple} \\ \lambda = (1 - \alpha)f'(x^*) & \text{con multiplicidad } (m - 1) \end{cases}$$

Para que el punto fijo (3.2), o lo que es lo mismo, el estado sincronizado estacionario, sea estable se tendrá que cumplir

$$|f'(x^*)| < 1 \text{ y } |(1 - \alpha)f'(x^*)| < 1$$

Estas dos condiciones se verifican, cuando x^* es un punto estable de la función $f(x)$, ya que en este caso $|f'(x^*)| < 1$. ■

Con el anterior teorema queda probada la existencia para el CML de puntos fijos. Todos los osciladores han tomado el mismo valor en todo instante n , es decir han estado sincronizados. Se ha demostrado que el estado sincronizado presenta la misma estabilidad que el punto fijo x^* de la función f .

3.1.2. Estados sincronizados periódicos.

Es conocida la existencia de órbitas de periodo p para una función $f(x) \in C^1$ unimodal, surge de forma natural plantearse si el CML reproducirá de algún modo el comportamiento de la función $f(x)$.

En este apartado se analiza la existencia de estados sincronizados periódicos mediante un proceso análogo al utilizado en la demostración de la existencia de estados sincronizados estacionarios.

Mostraremos, primeramente, en el siguiente lema, la existencia de un estado sincronizado de periodo dos (ver figura 3.2), esto nos ayudará a comprender la dinámica del proceso subyacente, y su posterior generalización para periodos arbitrarios.

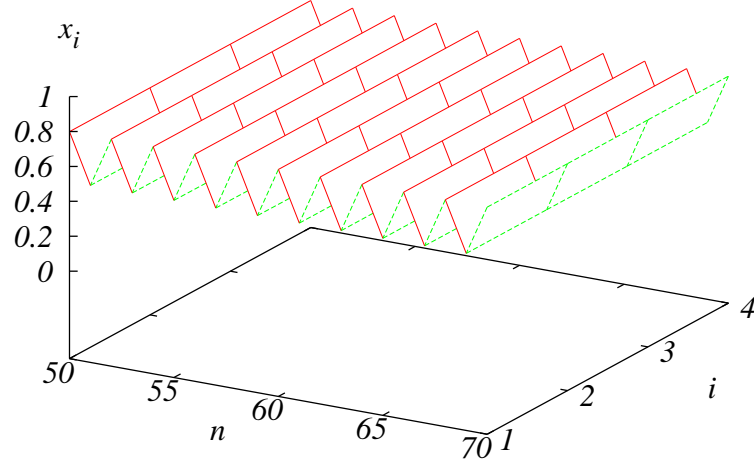


Figura 3.2: Estado sincronizado de periodo dos. $r = 3,2$, f y α iguales que en la figura 3.1.

Lema 1

Sea $\{x_1^*, x_2^*\}$ una órbita de período dos de f , donde f es una función C^1 , entonces el CML dado por

$$X_i(n+1) = (1-\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha}{m} \sum_{i=1}^m f(X_i(n))$$

$$i = 1, \dots, m$$

- i) Presenta un estado sincronizado de periodo 2 que viene dado por $X_j^* = (x_j^*, \dots, x_j^*)^{(m)}$ $j = 1, 2$.
- ii) El estado sincronizado $X_j^* = (x_j^*, \dots, x_j^*)^{(m)}$ presenta la misma estabilidad que el punto fijo x_j^* de f^2 con $j = 1, 2$.

Demostración.

- i) Dado que

$$X_i(n+1) = (1-\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha}{m} \sum_{i=1}^m f(X_i(n))$$

$$i = 1, \dots, m$$

tomando como posición inicial

$$(X_1(n), X_2(n), \dots, X_m(n)) = (x_1^*, x_1^*, \dots, x_1^*)$$

(similar sería el estudio considerando la posición inicial en el punto $(x_2^*, x_2^*, \dots, x_2^*)$), resulta que

$$X_i(n+1) = (1-\alpha)f(x_1^*) + \frac{\alpha}{m} \sum_{i=1}^m f(x_1^*) = f(x_1^*) = x_2^*$$

$$i = 1, \dots, m$$

$$X_i(n+2) = (1-\alpha)f(x_2^*) + \frac{\alpha}{m} \sum_{i=1}^m f(x_2^*) = f(x_2^*) = x_1^* = X_i(n)$$

$$i = 1, \dots, m$$

De lo que se deduce que el CML ha reproducido el comportamiento del sistema $y_{n+1} = f(y_n)$, presentando patterns de periodo 2 y además tiene una órbita de ese mismo periodo.

ii) Estudiemos la estabilidad lineal de los estados sincronizados periódicos. Para ello hemos de calcular los autovalores de la matriz jacobiana del sistema resultante tras dos iteraciones.

Como:

$$\left(\frac{\partial X_i(n+1)}{\partial X_j(n)} \right)_{X_1^*} = \begin{pmatrix} (1 - \frac{m-1}{m}\alpha) & \frac{\alpha}{m} & \dots & \frac{\alpha}{m} \\ \frac{\alpha}{m} & (1 - \frac{m-1}{m}\alpha) & \dots & \frac{\alpha}{m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha}{m} & \frac{\alpha}{m} & \dots & (1 - \frac{m-1}{m}\alpha) \end{pmatrix} f'(x_1^*)$$

resulta, tras aplicar la regla de la cadena, que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial X_i(n+2)}{\partial X_j(n)} \right)_{X_1^*} = & \\ & \begin{pmatrix} (1 - \frac{m-1}{m}\alpha) & \frac{\alpha}{m} & \cdots & \frac{\alpha}{m} \\ \frac{\alpha}{m} & (1 - \frac{m-1}{m}\alpha) & \cdots & \frac{\alpha}{m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha}{m} & \frac{\alpha}{m} & \cdots & (1 - \frac{m-1}{m}\alpha) \end{pmatrix} f'(x_2^*) \left(\frac{\partial X_i(n+1)}{\partial X_j(n)} \right)_{X_1^*} = \\ & \begin{pmatrix} \frac{1}{m} + \frac{m-1}{m}(1-\alpha)^2 & \frac{1}{m} - \frac{1}{m}(1-\alpha)^2 & \cdots & \frac{1}{m} - \frac{1}{m}(1-\alpha)^2 \\ \frac{1}{m} - \frac{1}{m}(1-\alpha)^2 & \frac{1}{m} + \frac{m-1}{m}(1-\alpha)^2 & \cdots & \frac{1}{m} - \frac{1}{m}(1-\alpha)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{m} - \frac{1}{m}(1-\alpha)^2 & \frac{1}{m} - \frac{1}{m}(1-\alpha)^2 & \cdots & \frac{1}{m} + \frac{m-1}{m}(1-\alpha)^2 \end{pmatrix} f'(x_1^*) f'(x_2^*) \end{aligned}$$

Esta matriz es simétrica, por lo tanto es estrictamente diagonalizable y sus autovalores serán reales.

Al restar a cada elemento de la diagonal el valor $(1-\alpha)^2 f'(x_1^*) f'(x_2^*)$ se consigue una matriz con todas sus filas iguales, por tanto $(1-\alpha)^2 f'(x_1^*) f'(x_2^*)$ es un autovalor de multiplicidad $m-1$, el otro es simple y se obtendrá a través de la traza. De donde se deduce que sus autovalores son:

$$\begin{cases} \lambda = f'(x_1^*) f'(x_2) & \text{simple} \\ \lambda = (1-\alpha)^2 f'(x_1^*) f'(x_2) & \text{con multiplicidad } (m-1) \end{cases}$$

Al ser $(f^2(x))' = f'(f(x)) f'(x)$ es posible expresar los autovalores de la matriz $\left(\frac{\partial X_i(n+2)}{\partial X_j(n)} \right)_{X_1^*}$ en función de la derivada de f^2 , resultando

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda = f^{2'}(x_1^*) = f^{2'}(x_2^*) & \text{simple} \\ \lambda = (1 - \alpha)^2 f^{2'}(x_1^*) = (1 - \alpha)^2 f^{2'}(x_2^*) & \text{con multiplicidad } (m - 1) \end{array} \right.$$

Como consecuencia, si x_i^* era un punto fijo estable para f^2 cumplirá que $|f^{2'}(x_i^*)| < 1$, por tanto se deduce que el CML presenta un estado sincronizado de periodo dos estable ya que

$$\left\{ \begin{array}{l} |f^{2'}(x_i^*)| < 1 \\ |(1 - \alpha)^2 f^{2'}(x_1^*)| < 1 \end{array} \right.$$

al ser $0 < \alpha < 1$. ■

De nuevo se ha comprobado que el comportamiento del sistema es similar al de la función f que rige el comportamiento individual de los osciladores.

A continuación nos planteamos si este resultado se puede generalizar a estados sincronizados de mayor período. Este análisis se aborda en el siguiente resultado.

Teorema 2

Sea $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*\}$ una órbita de periodo p , donde f es una función C^1 , entonces el CML dado por

$$X_i(n+1) = (1 - \alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha}{m} \sum_{i=1}^m f(X_i(n))$$

$$i = 1, \dots, m$$

- i) $X_j^* = (x_j^*, \dots, x_j^*)_{j=1, \dots, p}^{(m)}$ es un estado sincronizado del CML con periodo p .
- ii) El estado sincronizado $X_j^* = (x_j^*, \dots, x_j^*)^{(m)}$ presenta la misma estabilidad que el punto fijo x_j^* de f^p con $j = 1, 2, \dots, p$.

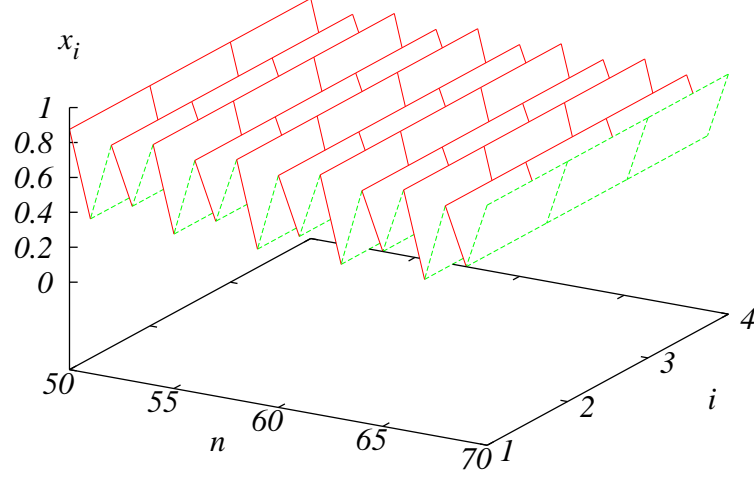


Figura 3.3: Estado sincronizado de periodo cuatro. $r = 3,4985$; f y α iguales que en la figura 3.1.

Demostración

i) Si se toma

$$X_i(n) = x_1^* \quad i = 1, \dots, m$$

se tiene que

$$\begin{aligned} X_i(n+1) &= (1-\alpha)f(x_1^*) + \frac{\alpha}{m}\sum_{j=1}^m f(x_1^*) = f(x_1^*) \\ i &= 1, \dots, m \end{aligned}$$

La segunda iteración será:

$$\begin{aligned} X_i(n+2) &= (1-\alpha)f(X_i(n+1)) + \frac{\alpha}{m}\sum_{j=1}^m f(X_j(n+1)) = \\ &= (1-\alpha)f(f(x_1^*)) + \frac{\alpha}{m}mf(f(x_1^*)) = f(f(x_1^*)) = f^2(x_1^*) \\ i &= 1, \dots, m \end{aligned}$$

y la iteración p -ésima será

$$\begin{aligned} X_i(n+p) &= (1-\alpha)f(X_i(n+p-1)) + \frac{\alpha}{m} \sum_{j=1}^m f(X_j(n+p-1)) = \\ &= f^p(x_1^*) = x_1^* = X_i(n) \\ &i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Queda demostrada la existencia de un estado sincronizado de período p .

ii) Para estudiar la estabilidad del estado sincronizado

$$X_j^* = (x_j^*, x_j^*, \dots, x_j^*)_{j=1, \dots, p}^{(m)}$$

basta que el estudio se haga en $X_1^* = (x_1^*, x_1^*, \dots, x_1^*)^{(m)}$ porque $f^{p'}(x_j^*)$ tiene el mismo valor para todo punto fijo x_j^* de f^p .

Calculemos los autovalores de la matriz jacobiana del iterado p -ésimo del sistema en ese punto. Para calcular la matriz jacobiana obsérvese que, al aplicar la regla de la cadena, resulta

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial X_i(n+p)}{\partial X_j(n)} \right)_{X_1^*} = \\ &= \begin{pmatrix} (1 - \frac{m-1}{m}\alpha) & \frac{\alpha}{m} & \dots & \frac{\alpha}{m} \\ \frac{\alpha}{m} & (1 - \frac{m-1}{m}\alpha) & \dots & \frac{\alpha}{m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha}{m} & \frac{\alpha}{m} & \dots & (1 - \frac{m-1}{m}\alpha) \end{pmatrix} f'(x_p^*) \left(\frac{\partial X_i(n+p-1)}{\partial X_j(n)} \right)_{X_1^*} \end{aligned}$$

de la misma manera resulta

$$\left(\frac{\partial X_i(n+p-1)}{\partial X_j(n)} \right)_{X_1^*} =$$

$$\begin{pmatrix} (1 - \frac{m-1}{m}\alpha) & \frac{\alpha}{m} & \cdots & \frac{\alpha}{m} \\ \frac{\alpha}{m} & (1 - \frac{m-1}{m}\alpha) & \cdots & \frac{\alpha}{m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha}{m} & \frac{\alpha}{m} & \cdots & (1 - \frac{m-1}{m}\alpha) \end{pmatrix} f'(x_{p-1}^*) \left(\frac{\partial X_i(n+p-2)}{\partial X_j(n)} \right)_{X_1^*}$$

$$\vdots$$

y finalmente

$$\left(\frac{\partial X_i(n+1)}{\partial X_j(n)} \right)_{X_1^*} = \begin{pmatrix} (1 - \frac{m-1}{m}\alpha) & \frac{\alpha}{m} & \cdots & \frac{\alpha}{m} \\ \frac{\alpha}{m} & (1 - \frac{m-1}{m}\alpha) & \cdots & \frac{\alpha}{m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha}{m} & \frac{\alpha}{m} & \cdots & (1 - \frac{m-1}{m}\alpha) \end{pmatrix} f'(x_1^*)$$

por lo que se tiene

$$\left(\frac{\partial X_i(n+p)}{\partial X_j(n)} \right)_{X_1^*} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{m} + \frac{m-1}{m}(1-\alpha)^p & \frac{1}{m} - \frac{1}{m}(1-\alpha)^p & \cdots & \frac{1}{m} - \frac{1}{m}(1-\alpha)^p \\ \frac{1}{m} - \frac{1}{m}(1-\alpha)^p & \frac{1}{m} + \frac{m-1}{m}(1-\alpha)^p & \cdots & \frac{1}{m} - \frac{1}{m}(1-\alpha)^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{m} - \frac{1}{m}(1-\alpha)^p & \frac{1}{m} - \frac{1}{m}(1-\alpha)^p & \cdots & \frac{1}{m} + \frac{m-1}{m}(1-\alpha)^p \end{pmatrix} \prod_{j=1}^p f'(x_j^*)$$

Esta matriz es simétrica, por lo tanto es estrictamente diagonalizable y sus autovalores serán reales.

Fijándonos en los elementos que constituyen la matriz, se observa que al restar a los términos de la diagonal el valor $(1-\alpha)^p \prod_{j=1}^p f'(x_j^*)$ se obtiene una matriz con todas las filas idénticas, es decir, una matriz de rango 1, lo que indica que $(1-\alpha)^p \prod_{j=1}^p f'(x_j^*)$ es un autovalor de multiplicidad $(m-1)$, y el otro es un autovalor simple y se calcula a través de la traza.

De esta manera se concluye que los autovalores de la matriz $\left(\frac{\partial X_i(n+p)}{\partial X_j(n)}\right)_{X_1^*}$ son

$$\begin{cases} \lambda = \prod_{j=1}^p f'(x_j^*) & \text{simple} \\ \lambda = (1-\alpha)^p \prod_{j=1}^p f'(x_j^*) & \text{con multiplicidad } (m-1) \end{cases}$$

Análogamente, al igual que en el lema 1 se pueden expresar estos autovalores en función de la derivada primera de la función $f^p(x)$, tal y como se indica a continuación

$$\begin{cases} \lambda = \prod_{j=1}^p f'(x_j^*) = f^{p'}(x_1^*) & \text{simple} \\ \lambda = (1-\alpha)^p \prod_{j=1}^p f'(x_j^*) = (1-\alpha)^p f^{p'}(x_1^*) & \text{con multiplicidad } (m-1) \end{cases} \quad (3.3)$$

Si x_1^* es punto fijo estable de f^p entonces $|f^{p'}(x_1^*)| < 1$ y por lo tanto los autovalores dados en (3.3) son de módulo menor que la unidad ya que $\alpha < 1$, por lo que se concluye que el CML tiene un estado sincronizado estable de periodo p . ■

Además si se toma $p = 1$ se recupera el estado sincronizado estacionario anteriormente estudiado en el teorema 1 de este capítulo, por lo tanto ese estado es un caso particular del actual; y en particular está sometido al proceso de duplicación de periodo tal como se describirá en la sección, “Cascada de duplicación de periodo”.

3.1.3. Estados sincronizados caóticos.

Por último vamos a estudiar la sincronización caótica.

Teorema 3.

Si $f(x)$ presenta una evolución caótica partiendo de x^* entonces el CML

$$\begin{aligned} X_i(n+1) &= (1-\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha}{m} \sum_{j=1}^m f(X_j(n)) \\ i &= 1, \dots, m \end{aligned}$$

tendrá un estado sincronizado caótico dado por

$$X^* = (x^*, \overset{m}{x^*} \dots, x^*)$$

Demostración

Tomando $X_i(n) = x^* \quad i = 1, \dots, m$ se analiza la evolución del CML en cualquier instante $p \in \mathbb{N}$.

Para ello se probará por inducción que

$$\begin{aligned} X_i(n+p) &= f^p(x^*) \\ \forall p &\in \mathbb{N} \end{aligned}$$

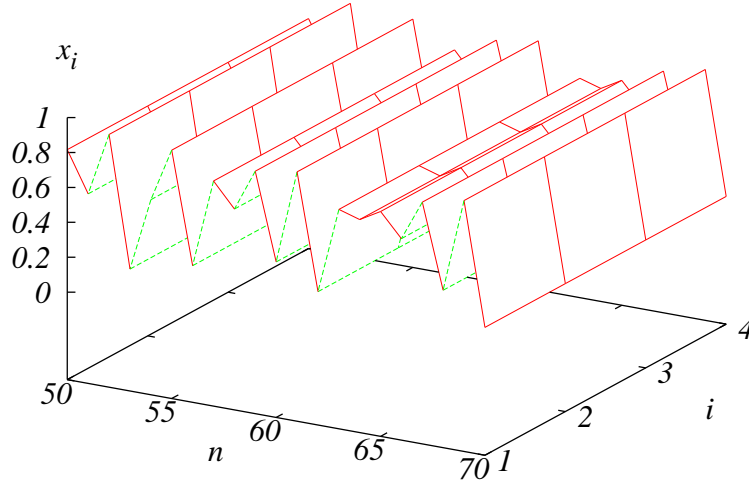


Figura 3.4: Estado sincronizado caótico. $r = 3,9$; f y α iguales que en la figura 3.1.

Para $p = 1$

$$\begin{aligned} X_i(n+1) &= (1-\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha}{m} \sum_{j=1}^m f(X_j(n)) = (1-\alpha)f(x^*) + \\ &+ \frac{\alpha}{m} \sum_{j=1}^m f(x^*) = (1-\alpha)f(x^*) + \frac{\alpha}{m} m f(x^*) = f(x^*) \end{aligned}$$

Si se supone cierto para p , es decir $X_i(n+p) = f^p(x^*)$, veamos que es cierto para $p+1$

$$\begin{aligned} X_i(n+p+1) &= (1-\alpha)f(X_i(n+p)) + \frac{\alpha}{m} \sum_{j=1}^m f(X_j(n+p)) = \\ &= (1-\alpha)f(f^p(x^*)) + \frac{\alpha}{m} \sum_{j=1}^m f(f^p(x^*)) = \\ &= (1-\alpha)f^{p+1}(x^*) + \frac{\alpha}{m} m f^{p+1}(x^*) = f^{p+1}(x^*) \end{aligned}$$

Por tanto se concluye que el CML, según evoluciona, reproduce la evolución del punto x^* de acuerdo a f . ■

3.1.4. Cascada de duplicación de periodo

Es de esperar que si la función f^p sufre una CDP, entonces el CML dado por (3.1) muestre una cascada de duplicación en los estados sincronizados de periodo p descritos por el teorema 2. La presunción es cierta, como demuestra el siguiente teorema.

Teorema 4

Los estados sincronizados de periodo p dados por el teorema 2 sufren una CDP conforme lo hace f^p .

Demostración

La demostración es directa usando el teorema 2, sin más que sustituir sucesivamente, en el teorema, p por $p \cdot 2, p \cdot 2^2, \dots, p \cdot 2^n, \dots$ cada vez que la órbita de periodo p de f duplique su periodo.

3.1.5. Un teorema de no existencia

Se ha probado, en el teorema 2, la existencia de estados sincronizados de periodo p arbitrario en CML, formados por los puntos fijos de f^p , cuando todos los osciladores están inicialmente en el mismo punto fijo de f^p .

Cabría esperar que la n -tupla de la forma

$$(X_1(n), X_2(n), \dots, X_p(n)) = (x_j^*, f(x_j^*), \dots, f^{p-1}(x_j^*))$$

$$f^p(x_j) = x_j \quad j = 1, \dots, p$$

que indica que cada oscilador se coloca en los sucesivos puntos de la órbita de periodo- p generara un pattern de periodo p en el CML, es decir, una onda viajera. Sin embargo esta presunción es falsa, tal y como se demuestra a continuación.

Teorema 5

Si $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*\}$ es una órbita de periodo p de f , donde f es una función C^1 , entonces el CML dado por

$$X_i(n+1) = (1-\alpha)f(X_i(n-1)) + \frac{\alpha}{p} \sum_{i=1}^p f(X_i(n-1))$$

$$i = 1, \dots, p$$

no tiene una órbita de periodo p de la forma

$$(X_1(n), X_2(n), \dots, X_p(n)) = (x_j^*, f(x_j^*), \dots, f^{p-1}(x_j^*))$$

siendo x_j^* cualquier punto de la órbita de periodo p .

Demostración

Si se toman las condiciones iniciales:

$$(X_1(n), X_2(n), \dots, X_p(n)) = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*)$$

tras la primera iteración se tendrá:

$$\begin{cases} X_1(n+1) = x_2^* = (1-\alpha)f(x_1^*) + \frac{\alpha}{p}(f(x_1^*) + \dots + f(x_p^*)) \\ X_2(n+1) = x_3^* = (1-\alpha)f(x_2^*) + \frac{\alpha}{p}(f(x_1^*) + \dots + f(x_p^*)) \\ \vdots \\ X_p(n+1) = x_1^* = (1-\alpha)f(x_p^*) + \frac{\alpha}{p}(f(x_1^*) + \dots + f(x_p^*)) \end{cases}$$

por tanto:

$$\begin{cases} x_2^* = (1 - \alpha)x_2^* + \frac{\alpha}{p}(x_1^* + \dots + x_p^*) \\ x_3^* = (1 - \alpha)x_3^* + \frac{\alpha}{p}(x_1^* + \dots + x_p^*) \\ \vdots \\ x_1^* = (1 - \alpha)x_1^* + \frac{\alpha}{p}(x_1^* + \dots + x_p^*) \end{cases}$$

operando resulta:

$$\begin{cases} \alpha x_2^* = \frac{\alpha}{p}(x_1^* + \dots + x_p^*) \\ \alpha x_3^* = \frac{\alpha}{p}(x_1^* + \dots + x_p^*) \\ \vdots \\ \alpha x_1^* = \frac{\alpha}{p}(x_1^* + \dots + x_p^*) \end{cases}$$

de donde se deduce si $\alpha \neq 0$ (Si $\alpha = 0$ los osciladores están desacoplados):

$$x_1^* = x_2^* = \dots = x_p^*$$

en contradicción con $x_1^* \neq x_2^* \neq \dots \neq x_p^*$. ■

Una idea intuitiva de entender el teorema 2 es imaginarnos a un grupo de personas en una escalera, todas en el mismo escalón, y que de forma periódica saltan (todas juntas) a otro escalón hasta visitar todos los escalones de la escalera. El proceso se repite periódicamente. El teorema 2 garantiza la existencia de este comportamiento.

El teorema 5 indicaría que cada persona se sitúa en un escalón distinto de la escalera y en un momento dado cada persona salta a otro escalón, realizando esta acción de forma periódica. El teorema 5 garantiza que tal proceso no existe en el CML para acoplamiento arbitrario. La búsqueda de este fenómeno será relevante en el posterior desarrollo de la tesis.

3.2. CML con acoplamiento a primeros vecinos.

Los anteriores resultados obtenidos hacen referencia a CML con acoplamiento de campo medio. Ahora nos preguntamos si estos resultados conservarán su validez cuando trabajemos con un CML con acoplamiento a primeros vecinos. Procedemos a realizar el estudio en dicho caso y concluir que en estos CML con acoplamiento a primeros vecinos se pueden encontrar estados sincronizados del mismo periodo que el periodo de la función f .

3.2.1. Estados sincronizado estacionario

Teorema 6

Sea el CML con m osciladores:

$$X_i(n+1) = (1-\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha}{2}(f(X_{i-1}(n)) + f(X_{i+1}(n))) \quad i = 1 \cdots m \quad (3.4)$$

con condiciones de periodicidad $X_0(n) = X_m(n)$ y $X_{m+1}(n) = X_1(n)$

El CML dado por (3.4)

- i) Presenta un estado sincronizado estacionario que viene dado por $X^* = (x^*, \dots, x^*)^{(m)}$ donde $f(x^*) = x^*$.
- ii) El estado sincronizado estacionario $X^* = (x^*, \dots, x^*)^{(m)}$ presenta la misma estabilidad que el punto fijo x^* de la función f .

Demostración

- i) $X^* = (x^*, \dots, x^*)^{(m)}$ es un punto fijo del sistema dado por (3.4) ya que si $f(x^*) = x^*$, y considerando

$$X_i(n) = x^* \quad i = 1, \dots, m$$

resulta

$$f(X_i(n)) = f(x^*) = x^* = X_i(n) \quad i = 1, \dots, m$$

y

$$X_i(n+1) = (1-\alpha)f(x^*) + \frac{\alpha}{2}(f(x^*) + f(x^*)) = f(x^*) = x^* = X_i(n)$$

$$i = 1, \dots, m$$

tal y como se quería demostrar.

ii) Para el estudio de la estabilidad lineal del estado sincronizado $X^* = (x^*, \dots, x^*)^{(m)}$, analizaremos los autovalores de la matriz jacobiana en dicho estado.

Los elementos de la matriz jacobiana vienen dados por:

$$\frac{\partial X_i(n+1)}{\partial X_j(n)} = \begin{cases} (1-\alpha)f'(X_i(n)) & j = i \\ \frac{\alpha}{2}f'(X_j(n)) & j = i+1 \quad j = i-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

que evaluados en X^* se obtiene:

$$\left. \frac{\partial X_i(n+1)}{\partial X_j(n)} \right|_{X^*} = \begin{cases} (1-\alpha)f'(x^*) & i = j \\ \frac{\alpha}{2}f'(x^*) & j = i+1 \quad j = i-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

de donde la matriz jacobiana resulta ser

$$\left(\frac{\partial X_i(n+1)}{\partial X_j(n)}\right)_{X^*} = C f'(x^*) \text{ con}$$

$$C = \begin{pmatrix} (1-\alpha) & \frac{\alpha}{2} & 0 & 0 & \cdots & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & (1-\alpha) & \frac{\alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & (1-\alpha) & \frac{\alpha}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2} & (1-\alpha) & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & (1-\alpha) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Para el calculo de los autovalores de la matriz $\left(\frac{\partial X_i(n+1)}{\partial X_j(n)}\right)_{X^*}$ bastará obtener los autovalores de C ya que si λ es un autovalor de la matriz C entonces $\lambda f'(x^*)$ será un autovalor de la matriz $(C f'(x^*))$.

La matriz C es simétrica y circulante [18]. Procederemos a calcular sus autovalores utilizando los resultados conocidos para las matrices circulantes.

Los autovalores de una matriz circulante C donde $C = \text{circ}(c_1, c_2, c_3, \dots, c_m)$ vienen dados por [18]

$$\lambda_k = h(w_k) \quad \text{donde} \quad \begin{cases} h(x) = \sum_{j=1}^m c_j x^{j-1} \\ w_k \quad (k = 1, \dots, m) \text{ son las raíces } m\text{-ésimas de la unidad.} \end{cases}$$

En nuestro caso la matriz C es $C = \text{circ}((1-\alpha), \frac{\alpha}{2}, 0, 0, \dots, 0, \frac{\alpha}{2})$, por tanto

$$h(x) = (1-\alpha) + \frac{\alpha}{2}x + \frac{\alpha}{2}x^{m-1}$$

entonces

$$\begin{aligned} \lambda_k &= h(w_k) = (1-\alpha) + \frac{\alpha}{2}e^{\frac{i2\pi k}{m}} + \frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{i2\pi k}{m}}\right)^{m-1} = \\ &= (1-\alpha) + \frac{\alpha}{2}\left[e^{\frac{i2\pi k}{m}} + e^{\frac{i2\pi k(m-1)}{m}}\right] = (1-\alpha) + \alpha\left[\frac{e^{\frac{i2\pi k}{m}} + e^{-\frac{i2\pi k}{m}}}{2}\right] = \\ &= (1-\alpha) + \alpha \cos\left(\frac{2\pi k}{m}\right) \end{aligned}$$

Observamos que efectivamente sus m autovalores, que se obtienen sustituyendo respectivamente

$k = 0, \dots, m-1$, son reales, hecho que se esperaba por ser una matriz simétrica.

Por tanto los autovalores de la matriz C serán:

$$\lambda_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ ((1 - \alpha) + \alpha \cos(\frac{2\pi k}{m})) & k = 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

y en consecuencia los autovalores de la matriz $\left(\frac{\partial X_i(n+1)}{\partial X_j(n)}\right)_{X^*}$ serán:

$$\lambda_k = \begin{cases} f'(x^*) & k = 0 \\ ((1 - \alpha) + \alpha \cos(\frac{2\pi k}{m})) f'(x^*) & k = 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

Veamos que si x^* es un punto fijo estable de $f(x)$ entonces X^* es un estado sincronizado estacionario estable del sistema. Para ello es necesario probar que $|\lambda_k| < 1 \quad \forall k = 0, \dots, m-1$.

Para $k = 0$ se tiene que $|\lambda_k| = |f'(x^*)| < 1$ por ser x^* punto fijo estable de f .

Para $k = 1, \dots, m-1$ se tiene que

$$|\lambda_k| = \left| \left((1 - \alpha) + \alpha \cos\left(\frac{2\pi k}{m}\right) \right) f'(x^*) \right| = \left| \left((1 - \alpha) + \alpha \cos\left(\frac{2\pi k}{m}\right) \right) \right| |f'(x^*)|$$

y como

$$\left| \left((1 - \alpha) + \alpha \cos\left(\frac{2\pi k}{m}\right) \right) \right| < |(1 - \alpha)| + \left| \alpha \cos\left(\frac{2\pi k}{m}\right) \right| < |(1 - \alpha)| + |(\alpha)| = 1 \quad (3.6)$$

ya que $0 < \alpha < 1$ y como

$$|f'(x^*)| < 1$$

entonces se concluye que $|\lambda_k| < 1 \quad \forall k$ ■

Nuevamente el CML ha heredado el comportamiento de la función f que gobierna la dinámica individual y esto nos ha permitido encontrar un estado sincronizado estable estacionario en un CML con acoplamiento a primeros vecinos. La siguiente pregunta que se plantea es si para dicho CML

existirán estados sincronizados periódicos. Este estudio se abordará en el siguiente apartado.

3.2.2. Estados sincronizados periódicos.

Empezaremos mostrando la existencia de un estado sincronizado de periodo dos, para posteriormente afrontar el estudio de un estado sincronizado de periodo p .

Lema 2

Sea $\{x_1^*, x_2^*\}$ una órbita de periodo dos de f , donde f es una función C^1 , entonces el CML dado por

$$X_i(n+1) = (1-\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha}{2}(f(X_{i-1}(n)) + f(X_{i+1}(n))) \quad i = 1 \dots m$$

con condiciones de periodicidad $X_0(n) = X_m(n)$ y $X_{m+1}(n) = X_1(n)$

- i) Presenta un estado sincronizado de periodo 2 que viene dado por $X_j^* = (x_j^*, \dots, x_j^*)^{(m)}$ $j = 1, 2$.
- ii) El estado sincronizado $X_j^* = (x_j^*, \dots, x_j^*)^{(m)}$ presenta la misma estabilidad que el punto fijo x_j^* de f^2 con $j = 1, 2$.

Demostración

- i) Dado que

$$X_i(n+1) = (1-\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha}{2}(f(X_{i-1}(n)) + f(X_{i+1}(n)))$$

$$i = 1, \dots, m$$

tomando como condición inicial

$$(X_1(n), X_2(n), \dots, X_m(n)) = (x_1^*, x_1^*, \dots, x_1^*)$$

resulta que el iterado primero será

$$X_i(n+1) = (1-\alpha)f(x_1^*) + \frac{\alpha}{2}(f(x_1^*) + f(x_1^*)) = f(x_1^*) = x_2^*$$

$$i = 1, \dots, m$$

y el siguiente iterado será

$$X_i(n+2) = (1-\alpha)f(x_2^*) + \frac{\alpha}{2}(f(x_2^*) + f(x_2^*)) = f(x_2^*) = x_1^* = X_i(n)$$

$$i = 1, \dots, m$$

(Similar sería el estudio considerando la condición inicial en el punto $(x_2^*, x_2^*, \dots, x_2^*)$).

De lo que se deduce que el CML tiene un estado sincronizado de periodo dos, es decir, ha reproducido el comportamiento de la función f .

ii) Para determinar la estabilidad del estado sincronizado $X_1^* = (x_1^*, \dots, x_1^*)^m$ se analizan los autovalores de la matriz jacobiana evaluada en X_1^* , que viene dada por

$$\left(\frac{\partial X_i(n+2)}{\partial X_j(n)} \right)_{X_1^*} =$$

$$\begin{pmatrix} (1-\alpha) & \frac{\alpha}{2} & 0 & 0 & \dots & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & (1-\alpha) & \frac{\alpha}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & (1-\alpha) & \frac{\alpha}{2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2} & (1-\alpha) & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & (1-\alpha) \end{pmatrix} f'(x_2^*) \left(\frac{\partial X_i(n+1)}{\partial X_j(n)} \right)_{X_1^*} =$$

$$C^2 f'(x_2^*) f'(x_1^*)$$

siendo C la matriz definida en (3.5).

Teniendo en cuenta que los autovalores de matriz C han sido obtenidos en el teorema 6, se tiene que los autovalores de esta matriz $\left(\frac{\partial X_i(n+2)}{\partial X_j(n)} \right)_{X_1^*}$ son los autovalores de la matriz C elevados al

cuadrado y multiplicados por $f(x_2^*)f'(x_1^*)$, es decir,

$$\lambda_k = \begin{cases} f(x_2^*)f'(x_1^*) & k = 0 \\ \left((1 - \alpha) + \alpha \cos\left(\frac{2\pi k}{m}\right) \right)^2 f(x_2^*)f'(x_1^*) & k = 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

y expresándolos en función de la derivada de f^2 se obtiene

$$\lambda_k = \begin{cases} f^{2'}(x_1^*) & k = 0 \\ \left((1 - \alpha) + \alpha \cos\left(\frac{2\pi k}{m}\right) \right)^2 f^{2'}(x_1^*) & k = 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta (3.6) se cumple

$$\left((1 - \alpha) + \alpha \cos\left(\frac{2\pi k}{m}\right) \right)^2 f^{2'}(x_1^*) < f^{2'}(x_1^*)$$

por lo que el autovalor dominante es $f^{2'}(x_1^*)$ y en consecuencia la estabilidad de X_1^* viene determinada por él.

Si x_1^* es un punto fijo estable para f^2 se cumplirá que $|f^{2'}(x_1^*)| < 1$ y por lo tanto $|\lambda_k|$ será menor que la unidad para todo k , por lo que X_1^* es un estado estable para el CML. ■

De nuevo el sistema repite el comportamiento de la función f , es decir, si tenemos una órbita de periodo 2 en la función f , el CML también presenta una órbita de periodo 2 y hereda su estabilidad.

El lema que acabamos de demostrar es una justificación teórica de los “antikink patterns” observados numéricamente por Kaneko [42]. Obsérvese que aunque Kaneko trabajó con interacción a primeros vecinos, nosotros hemos obtenido tanto la demostración teórica con interacción a primeros vecinos, en el lema 2, como a todos los vecinos, en el lema 1.

Procederemos a continuación a la generalización de este resultado. Se analizará la existencia de órbitas de periodo p .

Teorema 7

Sea $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*\}$ una órbita de periodo p de f donde, f es una función C^1 unimodal, entonces el CML dado por

$$X_i(n+1) = (1-\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha}{2}(f(X_{i-1}(n)) + f(X_{i+1}(n))) \quad i = 1 \cdots m$$

con condiciones de periodicidad $X_0(n) = X_m(n)$ y $X_{m+1}(n) = X_1(n)$

i) Presenta un estado sincronizado de periodo p que viene dado por $X_j^* = (x_j^*, \dots, x_j^*)^{(m)}$ $j = 1, \dots, p$

ii) El estado sincronizado $X_j^* = (x_j^*, \dots, x_j^*)^{(m)}$ $j = 1, \dots, p$ presenta la misma estabilidad que el punto fijo x_j^* de f^p con $j = 1, 2, \dots, p$.

Demostración

i) Si se toma

$$X_i(n) = x_1^* \quad i = 1, \dots, m$$

teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} X_i(n+1) &= (1-\alpha)f(x_1^*) + \frac{\alpha}{2}(f(x_1^*) + f(x_1^*)) = f(x_1^*) \\ i &= 1, \dots, m \end{aligned}$$

en la segunda iteración tendremos:

$$\begin{aligned} X_i(n+2) &= (1-\alpha)f(X_i(n+1)) + \frac{\alpha}{2}(f(X_{i-1}(n+1)) + f(X_{i+1}(n+1))) = \\ &= (1-\alpha)f(f(x_1^*)) + \frac{\alpha}{2}(f(f(x_1^*)) + f(f(x_1^*))) = f(f(x_1^*)) = f^2(x_1^*) \\ i &= 1, \dots, m \end{aligned}$$

y así sucesivamente la iteración p -ésima será

$$\begin{aligned}
 X_i(n+p) &= \\
 (1-\alpha)f(X_i(n+p-1)) + \frac{\alpha}{2}(f(X_{i-1}(n+p-1)) + f(X_{i+1}(n+p-1))) &= \\
 (1-\alpha)f(f^{p-1}(x_1^*)) + \frac{\alpha}{2}(f(f^{p-1}(x_1^*)) + f(f^{p-1}(x_1^*))) &= \\
 = f^p(x_1^*) = x_1^* = X_i(n) & \\
 i = 1, \dots, m &
 \end{aligned}$$

Como consecuencia queda demostrada la existencia de un estado sincronizado de periodo p para el CML.

ii) Pasaremos a estudiar la estabilidad lineal del estado sincronizado periódico. Para ello calculamos la matriz jacobiana tras p -iteraciones en X_1^*

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{\partial X_i(n+p)}{\partial X_j(n)} \right)_{X_1^*} \\
 &= \begin{pmatrix} (1-\alpha) & \frac{\alpha}{2} & 0 & \cdots & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & (1-\alpha) & \frac{\alpha}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & (1-\alpha) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha}{2} & 0 & 0 & \cdots & (1-\alpha) \end{pmatrix} f'(x_p^*) \left(\frac{\partial X_i(n+p-1)}{\partial X_j(n)} \right)_{X_1^*}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} (1-\alpha) & \frac{\alpha}{2} & 0 & \cdots & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & (1-\alpha) & \frac{\alpha}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & (1-\alpha) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha}{2} & 0 & 0 & \cdots & (1-\alpha) \end{pmatrix}^2 f'(x_p^*) f'(x_{p-1}^*) \left(\frac{\partial X_i(n+p-2)}{\partial X_j(n)} \right)_{X_1^*} \\
 &= \vdots \\
 &= \begin{pmatrix} (1-\alpha) & \frac{\alpha}{2} & 0 & \cdots & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & (1-\alpha) & \frac{\alpha}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & (1-\alpha) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha}{2} & 0 & 0 & \cdots & (1-\alpha) \end{pmatrix}^p \prod_{k=0}^{p-1} f'(x_{p-k}^*)
 \end{aligned}$$

y expresándolo en función de la derivada de f^p se tiene

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial X_i(n+p)}{\partial X_j(n)} \right)_{X_1^*} &= \begin{pmatrix} (1-\alpha) & \frac{\alpha}{2} & 0 & \cdots & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & (1-\alpha) & \frac{\alpha}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & (1-\alpha) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha}{2} & 0 & 0 & \cdots & (1-\alpha) \end{pmatrix}^p f^{p'}(x_1^*) = \\
 &= C^p f^{p'}(x_1^*)
 \end{aligned}$$

Los autovalores de la matriz $\left(\frac{\partial X_i(n+p)}{\partial X_j(n)} \right)_{X_1^*}$ son la potencia p -ésima de los autovalores de C (3.5)

multiplicados por $f^{p'}(x_1^*)$, es decir:

$$\lambda_k = \begin{cases} f^{p'}(x_1^*) & k = 0 \\ ((1 - \alpha) + \alpha \cos(\frac{2\pi k}{m}))^p f^{p'}(x_1^*) & k = 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

como se vio en (3.6) $((1 - \alpha) + \alpha \cos(\frac{2\pi k}{m}))^p < 1$ entonces el estado sincronizado del CML tiene la misma estabilidad que el punto fijo x_1^* de f^p . ■

3.2.3. Estados sincronizados caóticos

Veamos por último la sincronización caótica.

Teorema 8

Si $f(x)$ presenta una evolución caótica partiendo de x^* entonces el CML

$$X_i(n+1) = (1 - \alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha}{2}(f(X_{i-1}(n)) + f(X_{i+1}(n))) \quad i = 1 \dots m$$

tendrá un estado sincronizado caótico dado por $X^* = (x^*, x^*, \dots, x^*)^m$

Demostración

Tomando $X_i(n) = x^* \quad i = 1, \dots, m$ se analiza la evolución del CML en cualquier instante $p \in \mathbb{N}$.

Para ello se probará por inducción que

$$\begin{aligned} X_i(n+p) &= f^p(x^*) \\ \forall p &\in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Para $p = 1$

$$\begin{aligned} X_i(n+1) &= (1 - \alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha}{2}(f(X_{i-1}(n)) + f(X_{i+1}(n))) = \\ &= (1 - \alpha)f(x^*) + \frac{\alpha}{2}(f(x^*) + f(x^*)) = f(x^*) \end{aligned}$$

Se supone cierto para p , es decir $X_i(n+p) = f^p(x^*)$ y veamos que es cierto para $p+1$

$$\begin{aligned} X_i(n+p+1) &= (1-\alpha)f(X_i(n+p)) + \frac{\alpha}{2}(f(X_{i-1}(n+p)) + f(X_{i+1}(n+p))) = \\ &= (1-\alpha)f(f^p(x^*)) + \frac{\alpha}{2}(f(f^p(x^*)) + f(f^p(x^*))) = f(f^p(x^*)) \end{aligned}$$

Por tanto se concluye que el CML según evoluciona reproduce el comportamiento de la evolución del punto x^* . ■

3.2.4. Cascada de duplicación de periodo

El CML va a reflejar también la CDP en el caso que la función f la sufra. Este resultado será recogido en el siguiente teorema.

Teorema 9

Los estados sincronizados de periodo p dados por el teorema 7 sufren una CDP conforme lo hace f^p .

Demostración

La demostración es directa usando el teorema 7, sin más que sustituir sucesivamente, en el teorema, p por $p2, p2^2, \dots, p2^n, \dots$ cada vez que la órbita de periodo p de f duplique su periodo.

3.2.5. Un teorema de no existencia

De igual forma que en los CML con acoplamiento medio no mostraban ondas de periodo p cuando los osciladores estaban situados inicialmente en los puntos fijos de una órbita de periodo p , los CML con acoplamiento a primeros vecinos tampoco van a presentar este tipo de ondas. Procederemos a desmostarlo en el siguiente teorema.

Teorema 10

Si $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*\}$ es una órbita de periodo p de f , donde f es una función C^1 unimodal, entonces el CML dado por

$$X_i(n+1) = (1-\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha}{2}(f(X_{i-1}(n)) + f(X_{i+1}(n))) \quad i = 1 \dots m$$

con condiciones de periodicidad $X_0(n) = X_m(n)$ y $X_{m+1}(n) = X_1(n)$ no tiene una órbita de periodo p de la forma

$$(X_1(n), X_2(n), \dots, X_p(n)) = (x_j^*, f(x_j^*), \dots, f^{p-1}(x_j^*))$$

Siendo x_j^* cualquier punto de la órbita de periodo p de f .

Demostración

Si se toman las condiciones iniciales:

$$(X_1(n), X_2(n), \dots, X_p(n)) = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*)$$

tras la primera iteración se tendrá:

$$\begin{cases} X_1(n+1) = x_2^* = (1-\alpha)f(x_1^*) + \frac{\alpha}{2}(f(x_p^*) + f(x_2^*)) \\ X_2(n+1) = x_3^* = (1-\alpha)f(x_2^*) + \frac{\alpha}{2}(f(x_1^*) + f(x_3^*)) \\ \vdots \\ X_p(n+1) = x_1^* = (1-\alpha)f(x_p^*) + \frac{\alpha}{2}(f(x_{p-1}^*) + f(x_1^*)) \end{cases}$$

por tanto:

$$\begin{cases} x_2^* = (1-\alpha)x_2^* + \frac{\alpha}{2}(x_1^* + x_3^*) \\ x_3^* = (1-\alpha)x_3^* + \frac{\alpha}{2}(x_2^* + x_4^*) \\ \vdots \\ x_1^* = (1-\alpha)x_1^* + \frac{\alpha}{2}(x_p^* + x_2^*) \end{cases}$$

operando resulta:

$$\begin{cases} \alpha x_2^* = \frac{\alpha}{2}(x_1^* + x_3^*) \\ \alpha x_3^* = \frac{\alpha}{2}(x_2^* + x_4^*) \\ \vdots \\ \alpha x_1^* = \frac{\alpha}{2}(x_p^* + x_2^*) \end{cases}$$

expresando este sistema en forma matricial se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ \vdots \\ x_p^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Este sistema es homogéneo, por tanto admite siempre solución. Dependiendo del rango de la matriz de los coeficientes sabremos cual es la dimensión del subespacio de las soluciones. Para calcular el rango de esta matriz procederemos a calcular sus autovalores. Esta matriz es circulante y sus autovalores son [18]

$$\lambda_k = h(w_k) \quad \text{donde} \quad \begin{cases} h(x) = 1 - 2x + x^2 = (1 - x)^2 \\ w_k = e^{\frac{i2\pi k}{p}} \quad k = 0, \dots, p-1 \end{cases}$$

Se obtiene el autovalor 0 simple, lo que implica que la matriz del sistema tiene rango $p - 1$ y el conjunto de sus soluciones constituye por tanto un subespacio de dimensión uno. Obsérvese que $(1, 1, \dots, 1)$ es solución del sistema (3.7) y como consecuencia todas sus soluciones son de la forma

$$(x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*) = (\beta, \beta, \dots, \beta)$$

lo que significa que

$$x_1^* = x_2^* = \dots = x_p^*$$

y esto nos lleva a una contradicción con el hecho de que $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*)$ sean los puntos de una órbita de periodo p . ■

Si tomamos $\alpha = 0$ el sistema $X_i(n+1) = f(X_i(n))$ es un sistema donde el acoplamiento desaparece. En este caso si $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*\}$ es una órbita de periodo p de f el CML reproduciría esta órbita. Sin embargo este resultado no es cierto en general como se acaba de comprobar en los teoremas 5 y 10. Este hecho nos lleva a preguntarnos bajo que condiciones podrán existir estas ondas. Este estudio lo realizamos en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

ESTUDIO ANALÍTICO DE ONDAS VIAJERAS

Desde los trabajos pioneros de Kaneko [35–39] en CML se han venido observando ondas viajeras y CDP [22, 23, 42, 44]. Estos hallazgos son numéricos. En este capítulo vamos a probar la existencia de tales comportamientos y a dar una expresión analítica que las describa.

En el anterior capítulo se ha comprobado que si la función $f(x; r)$ tenía una órbita de periodo p el CML no heredaba dicha órbita en general. Dado que para $\alpha = 0$ sí existe la onda, cabe preguntarse si para un acoplamiento pequeño $\alpha \ll 1$, el CML admite una solución perturbada. La respuesta a tal pregunta es afirmativa, y es posible obtener analíticamente la expresión de la onda viajera tal y como se muestra en los siguientes teoremas.

Primeramente se realizará el estudio para CML con acoplamiento medio y a continuación para acoplamiento a primeros vecinos.

Para estudiar un acoplamiento débil sustituiremos en el CML dado por (3.1) y (3.4) α por $\varepsilon\alpha$ con $\varepsilon \ll 1$ y α de orden unidad .

Todos los teoremas en los que se realicen expansiones en ε serán válidas a $O(\varepsilon)$. Esta observación será aplicable en toda la tesis a partir de ahora.

4.1. El álgebra del sistema

Como posteriormente se verá, el estudio de la onda viajera llevará a la necesidad de calcular la expresión explícita de la inversa de la matriz B siguiente:

$$B = \begin{pmatrix} -f'(x_1^*) & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -f'(x_2^*) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -f'(x_3^*) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -f'(x_p^*) \end{pmatrix}$$

Esta matriz B es una matriz funcional y de tamaño arbitrario, esa matriz sería circulante si $x_1^* = x_2^* = \cdots = x_p^*$ pero no es el caso. Al no ser la matriz B una matriz circulante no disponemos de técnicas explícitas para su inversión. Calcular la inversa de una matriz funcional de tamaño arbitrario es una tarea bastante difícil. En particular la inversa de la matriz B viene dada, salvo constante multiplicativa por la matriz M de tamaño $p \times p$

$$M = \begin{pmatrix} f'(x_2^*)..f'(x_p^*) & f'(x_3^*)..f'(x_p^*) & f'(x_4^*)..f'(x_p^*) & \cdots & 1 \\ 1 & f'(x_3^*)..f'(x_p^*)f'(x_1^*) & f'(x_4^*)..f'(x_p^*)f'(x_1^*) & \cdots & f'(x_1^*) \\ f'(x_2^*) & 1 & f'(x_4^*)..f'(x_p^*)f'(x_1^*)f'(x_2^*) & \cdots & f'(x_1^*)f'(x_2^*) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'(x_2^*)..f'(x_{p-1}^*) & f'(x_3^*)..f'(x_{p-1}^*) & f'(x_4^*)..f'(x_{p-1}^*) & \cdots & f'(x_1^*)f'(x_2^*)..f'(x_{p-1}^*) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Una vez que se tiene la forma explícita de la matriz inversa, la manera más sencilla de probar que realmente se trata de la inversa es por multiplicación directa procedimiento que usaremos en el siguiente teorema.

Teorema 1

La matriz $\frac{1}{(1-(f^p(x_1^*))')}M$ siendo

$$M = \begin{pmatrix} f'(x_2^*)..f'(x_p^*) & f'(x_3^*)..f'(x_p^*) & f'(x_4^*)..f'(x_p^*) & \cdots & 1 \\ 1 & f'(x_3^*)..f'(x_p^*)f'(x_1^*) & f'(x_4^*)..f'(x_p^*)f'(x_1^*) & \cdots & f'(x_1^*) \\ f'(x_2^*) & 1 & f'(x_4^*)..f'(x_p^*)f'(x_1^*)f'(x_2^*) & \cdots & f'(x_1^*)f'(x_2^*) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'(x_2^*)..f'(x_{p-1}^*) & f'(x_3^*)..f'(x_{p-1}^*) & f'(x_4^*)..f'(x_{p-1}^*) & \cdots & f'(x_1^*)f'(x_2^*)..f'(x_{p-1}^*) \end{pmatrix}$$

es la inversa de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} -f'(x_1^*) & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -f'(x_2^*) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -f'(x_3^*) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -f'(x_p^*) \end{pmatrix}$$

Demostración

Denotemos por $b_{i,j}$ a los elementos de la matriz B y por $m_{i,j}$ a los elementos de la matriz M , entonces

$$b_{i,j} = \begin{cases} -f'(x_i^*) & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } j = i + 1, \quad i \neq p \\ 1 & \text{si } i = p \quad j = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i - 1, \quad i \neq 1 \\ 1 & \text{si } i = 1 \quad j = p \\ \prod_{k=1}^p \prod_{k \neq i} f'(x_k^*) & \text{si } j = i \\ m_{i-1,j} f'(x_{i-1}^*) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Nota: En la expresión de m_{ij} se considera que $\begin{cases} m_{0,j} = m_{p,j} \\ x_0^* = x_p^* \end{cases}$

Sea $C = BM$ y denotemos a los elementos de la matriz C por c_{ij} . Veamos que la matriz $C = (1 - (f^p(x_1^*))')I$ con lo que quedará probado que la matriz $\frac{1}{(1 - (f^p(x_1^*))')}M$ es la inversa de la matriz B .

Se tiene que $c_{i,j} = \sum_{k=1}^p b_{i,k} m_{k,j} = b_{i,i} m_{i,j} + b_{i,i+1} m_{i+1,j}$ considerando que $b_{p,p+1} = b_{p,1}$ resulta que

i) si $j = i - 1, i \neq 1$

$$c_{i,i-1} = b_{i,i} m_{i,i-1} + b_{i,i+1} m_{i+1,i-1} = -f'(x_i^*) + 1 m_{i,i-1} f'(x_i^*) = -f'(x_i^*) + f'(x_i^*) = 0$$

ii) Si $i = 1 \quad j = p$

$$c_{1,p} = b_{1,1} m_{1,p} + b_{1,2} m_{2,p} = -1 f'(x_1^*) + m_{1,p} f'(x_1^*) = -f'(x_1^*) + f'(x_1^*) = 0$$

iii) Si $i = j$

$$c_{i,i} = b_{i,i} m_{i,i} + b_{i,i+1} m_{i+1,i} = -f'(x_i^*) \prod_{k=1}^p \prod_{k \neq i} f'(x_k^*) + 1 = -\prod_{k=1}^p f'(x_k^*) + 1 = -(f^p(x_1^*))' + 1$$

iv) En otro caso

$$c_{i,j} = b_{i,i} m_{i,j} + b_{i,i+1} m_{i+1,j} = -f'(x_i^*) m_{i,j} + 1 m_{i,j} f'(x_i^*) = -f'(x_i^*) m_{i,j} + m_{i,j} f'(x_i^*) = 0$$

de donde se deduce, como se quería probar, que $C = (1 - (f^p(x_1^*))')I$ ■

La obtención de la expresión explícita de la inversa de la matriz B es muy importante ya que nos abre el camino para poder demostrar la existencia en CML débilmente acoplados de ondas viajeras

de periodo p . Se aborda a continuación este estudio.

4.2. CML con acoplamiento medio

4.2.1. Teorema 2. Ondas viajeras.

Sea $f : I \rightarrow I$, $f \in C^2$ una función dependiente de un parámetro, y sea $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*\}$ una órbita de período p de f tal que $f^{p'}(x_i^*) \neq 1$ $i = 1, \dots, p$ entonces el CML dado por

$$\begin{aligned} X_i(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{p} \sum_{j=1}^p f(X_j(n)) \\ i &= 1, \dots, p \quad \varepsilon \ll 1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

presenta una solución periódica de periodo p , dada por

$$X_i(n+j) = x_{i+j}^* + \varepsilon A_{i+j} + O(\varepsilon^2) \quad i = 1, \dots, p \quad j \in \mathbb{N}^*$$

donde

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{\alpha}{1 - (f^p(x_1^*))'} \left[\sum_{n=1}^{p-1} \left(\left(-x_{k+n}^* + \frac{1}{p} \sum_{l=1}^p x_l^* \right) \prod_{l=n}^{p-1} f'(x_{k+l}^*) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(-x_k^* + \frac{1}{p} \sum_{l=1}^p x_l^* \right) \right] \\ k &= 1, \dots, p \end{aligned}$$

con condiciones de periodicidad

$$\begin{aligned} A_{i+p} &= A_i \\ x_{i+p}^* &= x_i^* \end{aligned} \quad \forall i = 1, \dots, p$$

y $1 - (f^p(x_1^*))'$ es $O(1)$.

Demostración

La solución periódica dada por

$$\begin{aligned} X_i(n+j) &= x_{i+j}^* + \varepsilon A_{i+j} + O(\varepsilon^2) \\ i &= 1, \dots, p \end{aligned}$$

existirá cuando el sistema a $O(\varepsilon)$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i(n) = x_i^* + \varepsilon A_i \\ X_i(n+1) = x_{i+1}^* + \varepsilon A_{i+1} \\ \vdots \\ X_i(n+p-1) = x_{i+p-1}^* + \varepsilon A_{i+p-1} = x_{i-1}^* + \varepsilon A_{i-1} \\ X_i(n+p) = x_i^* + \varepsilon A_i \end{array} \right. \quad i = 1 \dots p \quad (4.3)$$

sea compatible.

Como

$$X_i(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\varepsilon\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f(X_j(n))$$

utilizando las igualdades expresadas en (4.3) resulta

$$x_{i+1}^* + \varepsilon A_{i+1} + O(\varepsilon^2) = (1 - \varepsilon\alpha)f(x_i^* + \varepsilon A_i + O(\varepsilon^2)) + \frac{\varepsilon\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f(x_j^* + \varepsilon A_j + O(\varepsilon^2)) \quad (4.4)$$

Haciendo la expansión

$$f(x_i^* + \varepsilon A_i + O(\varepsilon^2)) = f(x_i^*) + \varepsilon A_i f'(x_i^*) + O(\varepsilon^2)$$

y sustituyendo en la expresión (4.4) se tiene

$$x_{i+1}^* + \varepsilon A_{i+1} + O(\varepsilon^2) = (1 - \varepsilon\alpha)(x_{i+1}^* + \varepsilon A_i f'(x_i^*) + O(\varepsilon^2)) + \frac{\varepsilon\alpha}{p} \sum_{j=1}^p ((x_{j+1}^* + \varepsilon A_j f'(x_j^*)) + O(\varepsilon^2))$$

$$i = 1, \dots, p$$

agrupando se obtiene

$$x_{i+1}^* + \varepsilon A_{i+1} + O(\varepsilon^2) = x_{i+1}^* + \varepsilon A_i f'(x_i^*) - \varepsilon\alpha x_{i+1}^* + \frac{\varepsilon\alpha}{p} \sum_{j=1}^p (x_{j+1}^*) + O(\varepsilon^2)$$

$$i = 1, \dots, p$$

Resolviendo el sistema a orden ε se tiene:

$$-A_i f'(x_i^*) + A_{i+1} = -\alpha x_{i+1}^* + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p x_{j+1}^*$$

$$i = 1, \dots, p$$

cuya expresión matricial es:

$$\begin{pmatrix} -f'(x_1^*) & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -f'(x_2^*) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -f'(x_3^*) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -f'(x_p^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -x_2^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ -x_3^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ -x_4^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ \vdots \\ -x_1^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Este es un sistema de p ecuaciones con p incógnitas cuya matriz de los coeficiente tiene como determinante:

$$(-1)^p \prod_{i=1}^p f'(x_i^*) + (-1)^{p+1}$$

Como $\prod_{i=1}^p f'(x_i^*) = f^{p'}(x_i^*) \neq 1$ (por hipótesis del teorema) el sistema es compatible determinado. Además, la solución del sistema es distinta de la trivial para todo valor $\alpha \neq 0$, pues la columna de los términos independientes es no nula porque $x_1^* \neq x_2^* \neq \cdots \neq x_p^*$, es decir

$$\begin{pmatrix} -x_2^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ -x_3^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ -x_4^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ \vdots \\ -x_1^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

No importa que oscilador consideremos para estudiar la evolución del sistema, ya que el sistema algebraico que se obtiene es siempre el mismo.

Hemos obtenido que el sistema (4.5) tiene una única solución, que viene dada :

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -f'(x_1^*) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -f'(x_2^*) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -f'(x_p^*) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -x_2^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ -x_3^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ \vdots \\ -x_1^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \end{pmatrix}$$

La inversión de la matriz, utilizando el teorema 1 de este capítulo, lleva al siguiente resultado :

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix} = \alpha \frac{1}{1 - (f^p(x_1^*))'} MN \quad (4.6)$$

donde la matriz M es

$$M = \begin{pmatrix} f'(x_2^*) \cdots f'(x_p^*) & f'(x_3^*) \cdots f'(x_p^*) & f'(x_4^*) \cdots f'(x_p^*) & \cdots & 1 \\ 1 & f'(x_3^*) \cdots f'(x_p^*) f'(x_1^*) & f'(x_4^*) \cdots f'(x_p^*) f'(x_1^*) & \cdots & f'(x_1^*) \\ f'(x_2) & 1 & f'(x_4^*) \cdots f'(x_p^*) f'(x_1^*) f'(x_2) & \cdots & f'(x_1^*) f'(x_2^*) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'(x_2^*) \cdots f'(x_{p-1}^*) & f'(x_3^*) \cdots f'(x_{p-1}^*) & f'(x_4^*) \cdots f'(x_{p-1}^*) & \cdots & f'(x_1^*) f'(x_2^*) \cdots f'(x_{p-1}^*) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

y

$$N = \begin{pmatrix} -x_2^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ -x_3^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ -x_4^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ \vdots \\ -x_1^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \end{pmatrix}$$

Tras operar en (4.6) resulta:

$$A_k = \frac{\alpha}{1 - (f^p(x_1^*))'} \left[\sum_{n=1}^{p-1} \left(\left(-x_{k+n}^* + \frac{1}{p} \sum_{l=1}^p x_l^* \right) \prod_{l=n}^{p-1} f'(x_{k+l}^*) \right) + \left(-x_k^* + \frac{1}{p} \sum_{l=1}^p x_l^* \right) \right] \quad (4.8)$$

$k = 1, \dots, p$

Queda demostrada por tanto la existencia de la onda viajera de periodo p . ■

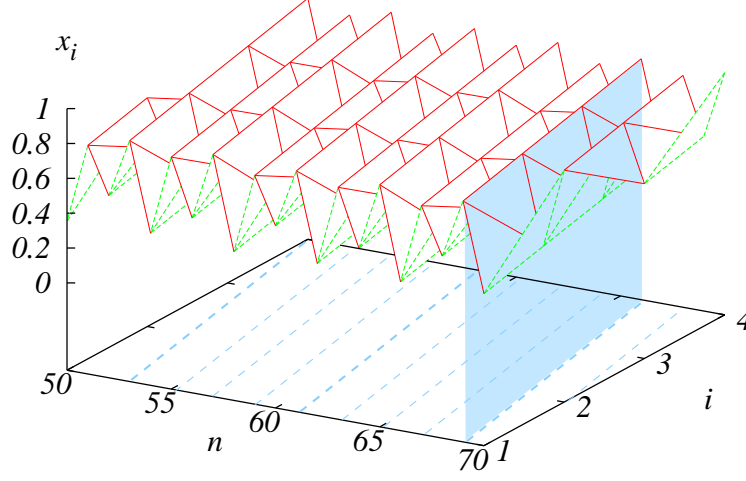


Figura 4.1: Onda viajera de periodo 4 del CML con $r = 3,55464$; $\varepsilon = 0,001$; f y α iguales que en la figura 3.1.

La dificultad de la demostración de la existencia de la onda viajera no reside sólo en encontrar el mecanismo subyacente (un acoplamiento débil), sino en que durante el proceso de demostración matemática es necesario invertir matrices de tamaño arbitrario, que además son funcionales; siendo nuevamente estas funciones totalmente arbitrarias. Aunque se han observado multitud de veces en integraciones numéricas, no se había probado analíticamente la existencia de tales ondas viajeras.

El teorema nos permite determinar valores de parámetro para los que existen ondas viajeras de periodo p . Como ejemplo mostramos las figuras 4.1 y 4.2 donde se muestran ondas viajeras de periodos 4 y 8 respectivamente.

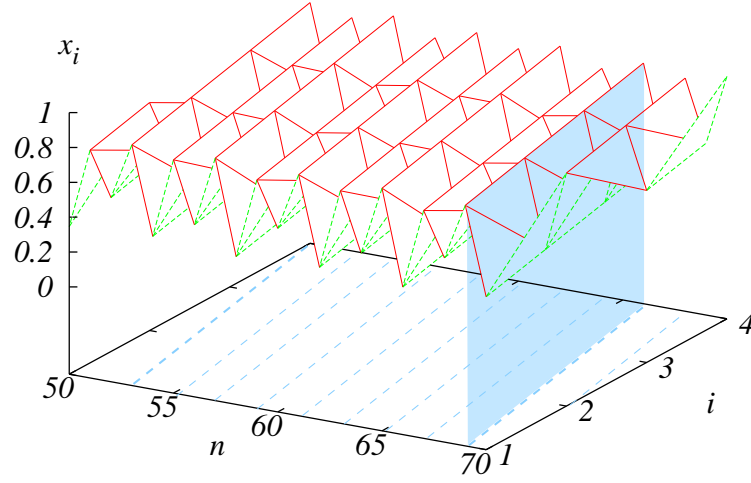


Figura 4.2: Onda viajera de periodo 8 del CML con $r = 3,566667$; $\varepsilon = 0,001$; f y α iguales que en la figura 3.1.

4.2.2. Cascada de duplicación de periodo de ondas viajeras en CML con acoplamiento medio

Hasta el momento se ha probado la existencia de estados sincronizados y ondas viajeras. Para los primeros ya se probó la existencia de CDP (en el capítulo 3, en los teoremas 4 y 9). A continuación se aborda el problema en el segundo caso. Este tipo de transición ya se había observado numéricamente [78], y utilizando solamente la aplicación de Mandelbrot real

$$f(x) = \mu + x^2$$

Nosotros procederemos a probar la existencia teórica para funciones de C^2 arbitrarias.

Este estudio se realizará en dos fases, primero se demostrará la existencia de la bifurcación de duplicación de periodo en el CML con acoplamiento medio, y a continuación se procederá a la demostración de la existencia de la CDP en dichos CML, para ello previamente se introduce la

siguiente notación.

Notación

Se denota por $x_{i,k}^*$ a los puntos fijos de la función f^k y por $\{x_{i,k}^*\}_{i=1}^k$ a los puntos de la órbita de periodo k de f^k .

Teorema 3. Existencia de la bifurcación de duplicación de periodo.

Sea $f : I \rightarrow I$, $f \in C^2$ una función unimodal dependiente de un parámetro, en función del cual la órbita de periodo 2^p del sistema $x_{n+1} = f(x_n)$ sufre una bifurcación de duplicación de periodo. Sea $\{x_{i,2^{p+1}}^*\}_{i=1}^{2^{p+1}}$ la órbita de periodo 2^{p+1} de la cascada. Denotemos $f^k(x_{i,2^{p+1}}^*) = x_{i+k,2^{p+1}}^*$. El CML dado por

$$X_i(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2^p} \sum_{j=1}^{2^p} f(X_j(n)) \quad (4.9)$$

$$i = 1, \dots, 2^p \quad \varepsilon \ll 1$$

presenta una solución periódica de periodo 2^{p+1} , dada por

$$X_i(n+j) = x_{2i-1+j,2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2i-1+j} + O(\varepsilon^2)$$

$$i = 1, \dots, 2^p \quad j \in \mathbb{N}$$

siendo

$$A_k = \frac{\alpha}{1 - (f^{2^{p+1}}(x_{1,2^{p+1}}^*))'} \left[\sum_{n=1}^{2^{p+1}-1} \left(\left(-x_{k+n,2^{p+1}}^* + \frac{1}{2^p} S_{k+n} \right) \cdot \prod_{l=n}^{2^{p+1}-1} f'(x_{k+l}^*) \right) + \left(-x_{k,2^{p+1}}^* + \frac{1}{2^p} S_k \right) \right]$$

$$k = 1, \dots, 2^{p+1}$$

con

$$S_j = \begin{cases} \sum_{i=1}^{2^p} x_{2(i-1)+2,2^{p+1}}^* & j = 2m \\ \sum_{i=1}^{2^p} x_{2(i-1)+1,2^{p+1}}^* & j = 2m-1 \end{cases} \quad m = 1, \dots, 2^p$$

con condiciones de periodicidad dadas por

$$A_{i+2^{p+1}} = A_i \quad \forall i$$

$$x_{i+2^{p+1},2^{p+1}}^* = x_{i,2^{p+1}}^*$$

y $1 - \left(f^{2^{p+1}}(x_{1,2^{p+1}}^*)\right)'$ es $O(1)$.

Demostración

Se consideran 2^p osciladores, con condiciones iniciales dadas por

$$X_i(n) = x_{2(i-1)+1,2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2(i-1)+1} \quad i = 1, \dots, 2^p \quad (4.10)$$

Obsérvese que se han tomado alternativamente los puntos de la solución $\left\{x_{i,2^{p+1}}^*\right\}_{i=1}^{2^{p+1}}$ más una perturbación que ha de determinarse. La existencia de una onda de periodo 2^{p+1} se tendrá cuando el sistema a $O(\varepsilon)$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i(n) = x_{2(i-1)+1,2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2(i-1)+1} \\ X_i(n+1) = x_{2(i-1)+2,2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2(i-1)+1} \\ \vdots \\ X_i(n+2^{p+1}) = x_{2(i-1)+2^{p+1}+1,2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2(i-1)+2^{p+1}+1} = x_{2(i-1)+1,2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2(i-1)+1} \end{array} \right. \quad i = 1, \dots, 2^p \quad (4.11)$$

sea compatible.

Como

$$X_i(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2^p} \sum_{j=1}^{2^p} f(X_j(n))$$

de (4.11) resulta

$$\begin{aligned} & x_{2(i-1)+2,2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2(i-1)+1} + O(\varepsilon^2) = \\ & = (1 - \varepsilon\alpha)f(x_{2(i-1)+1,2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2(i-1)+1} + O(\varepsilon^2)) \\ & \quad + \frac{\alpha\varepsilon}{2^p} \sum_{j=1}^{2^p} f(x_{2(j-1)+1,2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2(j-1)+1} + O(\varepsilon^2)) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Haciendo la expansión de f a orden $O(\varepsilon^2)$ y sustituyendo en la ecuación (4.12) se obtiene

$$\begin{aligned} & x_{2(i-1)+2,2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2(i-1)+1} + O(\varepsilon^2) = \\ & = (1 - \varepsilon\alpha)f(x_{2(i-1)+1,2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2(i-1)+1} + O(\varepsilon^2)) + \\ & \quad + \frac{\varepsilon\alpha}{2^p} (x_{2,2^{p+1}}^* + x_{4,2^{p+1}}^* + \dots + x_{2i,2^{p+1}}^* + \dots + x_{2^{p+1},2^{p+1}}^*) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

de donde se deduce:

$$\begin{aligned} & x_{2i,2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2i-1} + O(\varepsilon^2) = \\ & = x_{2i,2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2(i-1)+1} f'(x_{2(i-1)+1,2^{p+1}}^*) \\ & \quad - \varepsilon\alpha x_{2i,2^{p+1}}^* + \frac{\varepsilon\alpha}{2^p} \sum_{i=1}^{2^p} x_{2i,2^{p+1}}^* + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

En la iteración siguiente se llegará a la ecuación:

$$\begin{aligned} x_{2i+1,2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2i} + O(\varepsilon^2) &= \\ &= x_{2i+1,2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2i-1} f'(x_{2i,2^{p+1}}^*) \\ &\quad - \varepsilon \alpha x_{2i+1,2^{p+1}}^* + \frac{\varepsilon \alpha}{2^p} \sum_{i=1}^{2^p} x_{2i-1,2^{p+1}}^* + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

y después de 2^{p+1} iteraciones, se tendrá la ecuación:

$$\begin{aligned} x_{2i-1+2^{p+1},2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2i-1} + O(\varepsilon^2) &= \\ &= x_{2i-1,2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2(i-1)} f'(x_{2(i-1)+1,2^{p+1}}^*) \\ &\quad - \varepsilon \alpha x_{2i-1,2^{p+1}}^* + \frac{\varepsilon \alpha}{2^p} \sum_{i=1}^{2^p} x_{2i-1,2^{p+1}}^* + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Para el oscilador i se tienen las 2^{p+1} ecuaciones que generan el sistema lineal a $O(\varepsilon)$, con expresión matricial:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -f'(x_{2(i-1)+1,2^{p+1}}^*) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -f'(x_{2(i-1)+2,2^{p+1}}^*) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -f'(x_{2(i-1)+2^{p+1},2^{p+1}}^*) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{2(i-1)+1} \\ A_{2(i-1)+2} \\ \vdots \\ A_{2(i-1)+2^{p+1}} \end{pmatrix} = \\ &= \alpha \begin{pmatrix} -x_{2(i-1)+2,2^{p+1}}^* + \frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^{2^{p+1}} x_{2(i-1)+2,2^{p+1}}^* \\ -x_{2(i-1)+3,2^{p+1}}^* + \frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^{2^{p+1}} x_{2(i-1)+1,2^{p+1}}^* \\ \vdots \\ -x_{2(i-1)+1,2^{p+1}}^* + \frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^{2^{p+1}} x_{2(i-1)+2,2^{p+1}}^* \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.13)$$

La expresión matricial (4.13) representa un sistema de 2^{p+1} ecuaciones con 2^{p+1} incógnitas, y el determinante de la matriz de los coeficientes viene dado por:

$$(-1)^{2^{p+1}} \prod_{i=1}^{2^{p+1}} f'(x_{i,2^{p+1}}^*) - (-1)^{2^{p+1}}$$

Dicho determinante es distinto de cero debido a que la bifurcación de duplicación de periodo se

produce cuando

$$\left(f^{2^{p+1}}\right)'(x_{i,2^{p+1}}^*) = -1$$

$$\left(\text{ya que } \prod_{i=1}^{2^{p+1}} f'(x_{i,2^{p+1}}^*) = \left(f^{2^{p+1}}\right)'(x_{i,2^{p+1}}^*)\right).$$

Como este determinante es no nulo el sistema es compatible determinado, y como en los casos vistos anteriormente a lo largo del trabajo, su solución será distinta de la trivial $\forall \alpha \neq 0$.

La solución del sistema (4.13) es:

$$\begin{pmatrix} A_{2(i-1)+1} \\ A_{2(i-1)+2} \\ \vdots \\ A_{2(i-1)+2^{p+1}} \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{1-(f^{2^{p+1}}(x_{1,2^{p+1}}^*))'} MN \quad (4.14)$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} -f'(x_{2(i-1)+1,2^{p+1}}^*) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -f'(x_{2(i-1)+2,2^{p+1}}^*) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -f'(x_{2(i-1)+2^{p+1},2^{p+1}}^*) \end{pmatrix}^{-1}$$

y

$$N = \begin{pmatrix} -x_{2(i-1)+2,2^{p+1}}^* + \frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^{2^{p+1}} x_{2(i-1)+2,2^{p+1}}^* \\ -x_{2(i-1)+3,2^{p+1}}^* + \frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^{2^{p+1}} x_{2(i-1)+1,2^{p+1}}^* \\ \vdots \\ -x_{2(i-1)+1,2^{p+1}}^* + \frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^{2^{p+1}} x_{2(i-1)+2,2^{p+1}}^* \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta la expresión de la matriz M obtenida en el teorema 1 de este capítulo y tras operar en (4.14) resulta:

$$A_k = \frac{\alpha}{1-(f^{2^{p+1}}(x_{1,2^{p+1}}^*))'} \left[\sum_{n=1}^{2^{p+1}-1} \left((-x_{k+n,2^{p+1}}^* + \frac{1}{2^p} S_{k+n}) \prod_{l=n}^{2^{p+1}-1} f'(x_{k+l}^*) \right) + \left(-x_{k,2^{p+1}}^* + \frac{1}{2^p} S_k \right) \right] \\ k = 1, \dots, 2^{p+1}$$

$$S_j = \begin{cases} \sum_{i=1}^{2^p} x_{2(i-1)+2, 2^{p+1}}^* & j = 2n \\ \sum_{i=1}^{2^p} x_{2(i-1)+1, 2^{p+1}}^* & j = 2n - 1 \end{cases} \quad n = 1, \dots, 2^p$$

■

Podemos generalizar el resultado anterior trabajando con los puntos fijos de $f^{2^{p+q}}$ en vez de los puntos fijos de $f^{2^{p+1}}$. En este caso, en lugar de considerar como condición inicial de los osciladores los puntos de la órbita de manera alternada (dejando un hueco entre ellos) se situarán inicialmente tomando uno de cada 2^q (es decir, dejando 2^{q-1} huecos entre ellos). La generalización conduce al siguiente teorema.

Teorema 4 . Cascada de duplicación de periodo de ondas viajeras.

Sea $f : I \rightarrow I$, $f \in C^2$ una función dependiente de un parámetro, en función del cual la órbita de periodo 2^p del sistema $x_{n+1} = f(x_n)$ sufre una CDP. Sea $\{x_{i, 2^{p+q}}^*\}_{i=1}^{2^{p+q}}$ la órbita de periodo 2^{p+q} de la cascada con $q \in \mathbb{N}$. Denotemos $f^k(x_{i, 2^{p+q}}^*) = x_{i+k, 2^{p+q}}^*$

El CML dado por

$$X_i(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2^p} \sum_{j=1}^{2^p} f(X_j(n)) \quad (4.15)$$

$$i = 1, \dots, 2^p \quad \varepsilon \ll 1$$

presenta una solución periódica de periodo 2^{p+q} , dada por

$$X_i(n+j) = x_{2^q(i-1)+1+j, 2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)+1+j} + O(\varepsilon^2)$$

$$i = 1, \dots, 2^p$$

siendo

$$A_k = \frac{\alpha}{1 - (f^{2^{p+q}}(x_{1, 2^{p+q}}^*))'} \left[\sum_{n=1}^{2^{p+q}-1} \left(\left(-x_{k+n, 2^{p+q}}^* + \frac{1}{2^p} S_{k+n} \right) \cdot \prod_{l=n}^{2^{p+q}-1} f'(x_{k+l}^*) \right) + \left(-x_{k, 2^{p+q}}^* + \frac{1}{2^p} S_k \right) \right]$$

$$k = 1, \dots, 2^{p+q}$$

con

$$S_j = \sum_{i=1}^{2^p} x_{2^q(i-1)+l, 2^{p+q}}^* \quad j = 2^{\bullet q} + l$$

donde $2^{\bullet q}$ representa un múltiplo de 2^q , con las condiciones de periodicidad,

$$\begin{aligned} A_{i+2^{p+q}} &= A_i \\ x_{i+2^{p+q}, 2^{p+q}}^* &= x_{i, 2^{p+q}}^* \end{aligned}$$

y $1 - \left(f^{2^{p+q}}(x_{1, 2^{p+q}}^*) \right)'$ es $O(1)$.

Demostración

Se consideran 2^p osciladores, con las condiciones iniciales dadas por

$$X_i(n) = x_{2^q(i-1)+1, 2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)+1} + O(\varepsilon^2) \quad i = 1, \dots, 2^p \quad (4.16)$$

Obsérvese que se han tomado como condiciones iniciales los puntos fijos de $f^{2^{p+q}}$, tomando uno de cada 2^q más una perturbación que ha de determinarse. La existencia de una solución de periodo 2^{p+q} se producirá cuando el sistema a $O(\varepsilon)$

$$\left\{ \begin{aligned} X_i(n) &= x_{2^q(i-1)+1, 2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)+1} \\ X_i(n+1) &= x_{2^q(i-1)+2, 2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)+2} \\ &\vdots \\ X_i(n+2^{p+q}) &= x_{2^q(i-1)+1+2^{p+q}, 2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)+2^{p+q}} = x_{2^q(i-1)+1, 2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)+1} \end{aligned} \right. \quad (4.17)$$

$i = 1, \dots, 2^p$

sea compatible.

Como

$$X_i(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2^p} \sum_{j=1}^{2^p} f(X_j(n))$$

de (4.17) resulta

$$\begin{aligned} x_{2^q(i-1)+2, 2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)+2} + O(\varepsilon^2) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(x_{2^q(i-1)+1, 2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)+1} + O(\varepsilon^2)) + \\ &\quad \frac{\alpha\varepsilon}{2^p} \sum_{j=1}^{2^p} f(x_{2^q(j-1)+1, 2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(j-1)+1} + O(\varepsilon^2)) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Haciendo la expansión de f a orden $O(\varepsilon^2)$ y sustituyendo en la ecuación (4.18) se obtiene

$$\begin{aligned}
 & x_{2^q(i-1)+2,2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)+2} + O(\varepsilon^2) = \\
 & = x_{2^q(i-1)+2,2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)+1} f'(x_{2^q(i-1)+1,2^{p+q}}^*) \\
 & \quad - \varepsilon \alpha x_{2^q(i-1)+2,2^{p+q}}^* + \frac{\varepsilon \alpha}{2^p} \sum_{i=1}^{2^p} x_{2^q(i-1)+2,2^{p+q}}^* + O(\varepsilon^2)
 \end{aligned}$$

En la iteración siguiente se llegará a la ecuación:

$$\begin{aligned}
 & x_{2^q(i-1)+3,2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)+3} + O(\varepsilon^2) = \\
 & = x_{2^q(i-1)+3,2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)+2} f'(x_{2^q(i-1)+2,2^{p+q}}^*) \\
 & \quad - \varepsilon \alpha x_{2^q(i-1)+3,2^{p+q}}^* + \frac{\varepsilon \alpha}{2^p} \sum_{i=1}^{2^p} x_{2^q(i-1)+3,2^{p+q}}^* + O(\varepsilon^2)
 \end{aligned}$$

y después de 2^{p+q} iteraciones, se tendrá la ecuación:

$$\begin{aligned}
 & x_{2^q(i-1)+1,2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)+1} + O(\varepsilon^2) = \\
 & = x_{2^q(i-1)+1,2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)} f'(x_{2^q(i-1),2^{p+q}}^*) \\
 & \quad - \varepsilon \alpha x_{2^q(i-1)+1,2^{p+q}}^* + \frac{\varepsilon \alpha}{2^p} \sum_{i=1}^{2^p} x_{2^q(i-1)+1,2^{p+q}}^* + O(\varepsilon^2)
 \end{aligned}$$

Para el oscilador i se tiene que las 2^{p+q} ecuaciones anteriores representan un sistema lineal a $O(\varepsilon)$, cuya expresión matricial es:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} -f'(x_{2^q(i-1)+1,2^{p+q}}^*) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -f'(x_{2^q(i-1)+2,2^{p+q}}^*) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -f'(x_{2^q(i-1)+2^{p+1},2^{p+q}}^*) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{2^q(i-1)+1} \\ A_{2^q(i-1)+2} \\ \vdots \\ A_{2^q(i-1)+2^{p+q}} \end{pmatrix} = \\
 & = \alpha \begin{pmatrix} -x_{2^q(i-1)+2,2^{p+q}}^* + \frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^{2^{p+1}} x_{2^q(i-1)+2,2^{p+q}}^* \\ -x_{2^q(i-1)+3,2^{p+q}}^* + \frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^{2^{p+1}} x_{2^q(i-1)+3,2^{p+q}}^* \\ \vdots \\ -x_{2^q(i-1)+1,2^{p+q}}^* + \frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^{2^{p+1}} x_{2^q(i-1)+2,2^{p+q}}^* \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

El determinante de la matriz de los coeficientes es:

$$(-1)^{2^{p+q}} \prod_{i=1}^{2^{p+q}} f'(x_{i,2^{p+q}}^*) - (-1)^{2^{p+q}} = f^{2^{p+q}'}(x_{i,2^{p+q}}^*) - 1$$

que es distinto de cero, debido a que la bifurcación de duplicación de periodo se produce cuando $(f^{2^{p+q}})'(x_{i,2^{p+q}}^*) = -1$.

El sistema es compatible determinado $\forall \alpha$ y como en los casos anteriores, su solución es distinta de la trivial si $\alpha \neq 0$.

Su solución se obtiene directamente de (4.19) por inversión resultando:

$$\begin{pmatrix} A_{2^q(i-1)+1} \\ A_{2^q(i-1)+2} \\ \vdots \\ A_{2^q(i-1)+2^{p+q}} \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{1-(f^{2^{p+q}}(x_{1,2^{p+q}}^*))'} MN \quad (4.20)$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} -f'(x_{2^q(i-1)+1,2^{p+q}}^*) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -f'(x_{2^q(i-1)+2,2^{p+q}}^*) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -f'(x_{2^q(i-1)+2^{p+q},2^{p+q}}^*) \end{pmatrix}^{-1}$$

y

$$N = \begin{pmatrix} -x_{2^q(i-1)+2,2^{p+q}}^* + \frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^{2^{p+1}} x_{2^q(i-1)+2,2^{p+q}}^* \\ -x_{2^q(i-1)+3,2^{p+q}}^* + \frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^{2^{p+1}} x_{2^q(i-1)+3,2^{p+q}}^* \\ \vdots \\ -x_{2^q(i-1)+1,2^{p+q}}^* + \frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^{2^{p+1}} x_{2^q(i-1)+1,2^{p+1}}^* \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta el teorema 1 de este capítulo y tras operar en (4.20) resulta:

$$A_k = \frac{\alpha}{1-(f^{2^{p+q}}(x_{1,2^{p+q}}^*))'} \left[\sum_{n=1}^{2^{p+q}-1} \left(\left(-x_{k+n,2^{p+q}}^* + \frac{1}{2^p} S_{k+n} \right) \cdot \prod_{l=n}^{2^{p+q}-1} f'(x_{k+l}^*) \right) + \left(-x_{k,2^{p+q}}^* + \frac{1}{2^p} S_k \right) \right] \\ k = 1, \dots, 2^{p+q}$$

con

$$S_j = \sum_{i=1}^{2^p} x_{2^q(i-1)+l,2^{p+q}}^* \quad j = 2^{\bullet q} + l \quad \blacksquare$$

Los resultados obtenidos anteriormente nos indican que el campo hereda el comportamiento de la función f , en el sentido que si en la función f se produce una duplicación de periodo, este fenómeno se repite en el CML. Si el CML esta formado por 2^p osciladores conforme la órbita de periodo 2^p de f duplica a una órbita de periodo 2^{p+1} de la misma forma lo hace el CML.

Como se ha deducido que el CML sufre una CDP cuando lo hace f , se concluye que el CML hereda la dinámica de f .

4.3. CML con acoplamiento a primeros vecinos.

Los resultados han sido obtenidos para CML con acoplamiento medio. A continuación se realizará el mismo estudio para CML con acoplamiento a primeros vecinos.

Primeramente se probará la existencia de ondas viajeras y posteriormente se analizará la aparición de la CDP.

4.3.1. Teorema 5. Ondas viajeras.

Sea $f : I \rightarrow I$, $f \in C^2$ una función dependiente de un parámetro, y sea $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*\}$ una órbita de período p de f tal que $f^{p'}(x_i^*) \neq 1 \quad i = 1, \dots, p$ entonces el CML dado por

$$\begin{aligned} X_i(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2}f(X_{i-1}(n)) + f(X_{i+1}(n)) \\ i &= 1, \dots, p \quad \varepsilon \ll 1 \end{aligned} \tag{4.21}$$

presenta una solución periódica de periodo p , dada por

$$\begin{aligned} X_i(n+j) &= x_{i+j}^* + \varepsilon A_{i+j} + O(\varepsilon^2) \\ i &= 1, \dots, p \quad j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{\alpha}{1-(f^p(x_1^*))'} \left[-x_k^* + \frac{1}{2} (x_{k-1}^* + x_{k+1}^*) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{p-1} \left((-x_{k+n}^* + \frac{1}{2} (x_{k+n-1}^* + x_{k+n+1}^*)) \prod_{l=n}^{p-1} f'(x_{k+l}^*) \right) \right] \\ k &= 1, \dots, p \end{aligned}$$

con condiciones de periodicidad

$$\begin{aligned} A_{i+p} &= A_i \\ x_{i+p}^* &= x_i^* \end{aligned} \quad \forall i$$

y $1 - (f^p(x_1^*))'$ es $O(1)$.

Demostración

Nos planteamos la existencia de la solución periódica, para ello el sistema a $O(\varepsilon)$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i(n) = x_i^* + \varepsilon A_i \\ X_i(n+1) = x_{i+1}^* + \varepsilon A_{i+1} \\ \vdots \\ X_i(n+p-1) = x_{i+p-1}^* + \varepsilon A_{i+p-1} = x_{i-1}^* + \varepsilon A_{i-1} \\ X_i(n+p) = x_i^* + \varepsilon A_i \end{array} \right. \quad i = 1 \dots p$$

debe ser compatible.

En este caso la expresión del CML es $X_i(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2}f(X_{i-1}(n)) + f(X_{i+1}(n))$ procediendo igual que en el teorema 2 de este capítulo, se llega a $O(\varepsilon)$ al sistema de p -ecuaciones con p -incógnitas siguiente:

$$\begin{aligned} -A_i f'(x_i^*) + A_{i+1} &= -\alpha x_{i+1}^* + \frac{\alpha}{2} (x_i^* + x_{i+2}^*) \\ i &= 1, \dots, p \end{aligned}$$

Este sistema expresado matricialmente queda:

$$\begin{pmatrix} -f'(x_1^*) & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -f'(x_2^*) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -f'(x_3^*) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -f'(x_p^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -x_2^* + \frac{1}{2}(x_3^* + x_1^*) \\ -x_3^* + \frac{1}{2}(x_4^* + x_2^*) \\ -x_4^* + \frac{1}{2}(x_5^* + x_3^*) \\ \vdots \\ -x_1^* + \frac{1}{2}(x_2^* + x_p^*) \end{pmatrix}$$

Aplicando el teorema 1, del capítulo actual, se tiene la expresión de la matriz inversa de los coeficientes. Esto nos aporta el poder determinar la expresión explícita de las soluciones de la

siguiente forma

$$A_k = \frac{\alpha}{1-(f^p(x_1^*))'} \left[-x_k^* + \frac{1}{2} (x_{k-1}^* + x_{k+1}^*) + \sum_{n=1}^{p-1} \left((-x_{k+n}^* + \frac{1}{2} (x_{k+n-1}^* + x_{k+n+1}^*)) \prod_{l=n}^{p-1} f'(x_{k+l}^*) \right) \right]$$

$$k = 1, \dots, p \quad \blacksquare$$

Con este teorema queda probada la existencia de ondas viajeras en CML con acoplamiento a primeros vecinos.

En el siguiente resultado se da respuesta a la pregunta de si en un CML con acoplamiento a primeros vecinos se produce el fenómeno de duplicación de periodo.

4.3.2. Cascada de duplicación de periodo.

Teorema 6. Existencia de la bifurcación de duplicación de periodo.

Sea $f : I \rightarrow I$, $f \in C^2$ una función dependiente de un parámetro, en función del cual la órbita de periodo 2^p del sistema $x_{n+1} = f(x_n)$ sufre una bifurcación de duplicación de periodo. Sea $\left\{ x_{i,2^{p+1}}^* \right\}_{i=1}^{2^{p+1}}$ la órbita de periodo 2^{p+1} de la cascada. Denotamos $f^k(x_{i,2^{p+1}}^*) = x_{i+k,2^{p+1}}^*$

El CML dado por

$$X_i(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2}f(X_{i-1}(n)) + f(X_{i+1}(n))$$

$$i = 1, \dots, 2^p \quad \varepsilon \ll 1$$

presenta una solución periódica de periodo 2^{p+1} , dada por

$$X_i(n+j) = x_{2i-1+j,2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2i-1+j} + O(\varepsilon^2)$$

$$i = 1, \dots, 2^p$$

donde

$$A_k = \frac{\alpha}{1 - \left(f^{2^{p+1}}(x_{1,2^{p+1}}^*)\right)'} \left[\sum_{n=1}^{2^{p+1}-1} \left(\left(-x_{k+n,2^{p+1}}^* + \frac{1}{2} \left(x_{k+n+2,2^{p+1}}^* + x_{k+n-2,2^{p+1}}^* \right) \right) \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \prod_{l=n}^{2^{p+1}-1} f'(x_{k+l,2^{p+1}}^*) \right) + \left(-x_{k,2^{p+1}}^* + \frac{1}{2} \left(x_{k+2,2^{p+1}}^* + x_{k-2,2^{p+1}}^* \right) \right) \right] \\ k = 1, \dots, 2^{p+1}$$

y $1 - \left(f^{2^{p+1}}(x_{1,2^{p+1}}^*)\right)'$ es $O(1)$.

Demostración

Nos planteamos la existencia de la solución de periodo 2^{p+1} , para ello el sistema a $O(\varepsilon)$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i(n) = x_{2(i-1)+1,2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2(i-1)+1} \\ X_i(n+1) = x_{2(i-1)+2,2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2(i-1)+1} \\ \vdots \\ X_i(n+2^{p+1}) = x_{2(i-1)+2^{p+1}+1,2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2(i-1)+2^{p+1}+1} = x_{2(i-1)+1,2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2(i-1)+1} \end{array} \right. \\ i = 1, \dots, 2^p$$

debe ser compatible.

La expresión del CML es

$$X_i(n+1) = (1 - \varepsilon \alpha) f(X_i(n)) + \frac{\alpha \varepsilon}{2} f(X_{i-1}(n)) + f(X_{i+1}(n))$$

procediendo igual que en el teorema 3, de este capítulo, se llega al sistema, de 2^{p+1} -ecuaciones con 2^{p+1} -incógnitas, a $O(\varepsilon)$, siguiente:

$$-A_i f'(x_i^*) + A_{i+1} = -\alpha x_{i+1}^* + \frac{\alpha}{2} (x_{i-1}^* + x_{i+3}^*) \\ i = 1, \dots, 2^{p+1}$$

Este sistema expresado matricialmente es:

$$\begin{pmatrix} -f'(x_{2(i-1)+1,2p+1}^*) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -f'(x_{2(i-1)+2,2p+1}^*) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -f'(x_{2(i-1)+2p+1,2p+1}^*) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{2(i-1)+1} \\ A_{2(i-1)+2} \\ \vdots \\ A_{2(i-1)+2p+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} -x_{2(i-1)+2,2p+1}^* + \frac{1}{2}(x_{2(i-1),2p+1}^* + x_{2(i-1)-2,2p+1}^*) \\ -x_{2(i-1)+3,2p+1}^* + \frac{1}{2}(x_{2(i-1)+1,2p+1}^* + x_{2(i-1)+5,2p+1}^*) \\ \vdots \\ -x_{2(i-1)+1,2p+1}^* + \frac{1}{2}(x_{2(i-1)-1,2p+1}^* + x_{2(i-1)+3,2p+1}^*) \end{pmatrix}$$

Aplicando el teorema 1, del capítulo actual, nos permite determinar la expresión explícita de la solución obteniéndose:

$$A_k = \frac{\alpha}{1 - (f^{2p+1}(x_{1,2p+1}^*))'} \left[\sum_{n=1}^{2^{p+1}-1} \left(\left(-x_{k+n,2p+1}^* + \frac{1}{2} (x_{k+n+2,2p+1}^* + x_{k+n-2,2p+1}^*) \right) \cdot \right. \right.$$

$$\left. \left. \prod_{l=n}^{2^{p+1}-1} f'(x_{k+l}^*) \right) + \left(-x_{k,2p+1}^* + \frac{1}{2} (x_{k+2,2p+1}^* + x_{k-2,2p+1}^*) \right) \right]$$

$$k = 1, \dots, 2^{p+1} \quad \blacksquare$$

Una vez probada la duplicación de periodo en estos CML, se analizará la existencia de la CDP en el siguiente resultado.

Teorema 7. Existencia de la cascada de duplicación de periodo.

Sea $f : I \rightarrow I$, $f \in C^2$ una función dependiente de un parámetro, en función del cual la órbita de periodo 2^p del sistema $x_{n+1} = f(x_n)$ sufre una CDP. Sea $\{x_{i,2p+q}^*\}_{i=1}^{2^{p+q}}$ la órbita de periodo 2^{p+q} de la cascada con $q \in \mathbb{N}$. Denotamos $f^k(x_{i,2p+q}^*) = x_{i+k,2p+q}^*$

El CML dado por

$$X_i(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2}f(X_{i-1}(n)) + f(X_{i+1}(n))$$

$$i = 1, \dots, 2^p \quad \varepsilon \ll 1$$

presenta una solución periódica de periodo 2^{p+q} , dada por

$$X_i(n+j) = x_{2^q(i-1)+1+j, 2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)+1+j} + O(\varepsilon^2)$$

$$i = 1, \dots, 2^p$$

donde

$$A_k = \frac{\alpha}{1 - (f^{2^{p+q}}(x_{1, 2^{p+q}}^*))'} \left[-x_{k, 2^{p+q}}^* + \frac{1}{2} \left(x_{k+2^q, 2^{p+q}}^* + x_{k-2^q, 2^{p+q}}^* \right) + \sum_{n=1}^{2^{p+q}-1} \left(\left(-x_{k+n, 2^{p+q}}^* + \frac{1}{2} \left(x_{k+n+2^q, 2^{p+q}}^* + x_{k+n-2^q, 2^{p+q}}^* \right) \right) \prod_{l=n}^{2^{p+q}-1} f'(x_{k+l}^*) \right) \right]$$

$$k = 1, \dots, 2^{p+q}$$

con las condiciones de periodicidad,

$$A_{i+2^{p+q}} = A_i$$

$$x_{i+2^{p+q}, 2^{p+q}}^* = x_{i, 2^{p+q}}^*$$

debido al carácter cíclico de la solución y $1 - \left(f^{2^{p+q}}(x_{1, 2^{p+q}}^*) \right)'$ es $O(1)$.

Demostración

La solución de periodo 2^{p+q} existirá si el siguiente sistema a $O(\varepsilon)$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i(n) = x_{2^q(i-1)+1, 2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)+1} \\ X_i(n+1) = x_{2^q(i-1)+2, 2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)+2} \\ \vdots \\ X_i(n+2^{p+q}) = x_{2^q(i-1)+1+2^{p+q}, 2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)+2^{p+q}} = x_{2^q(i-1)+1, 2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)+1} \end{array} \right.$$

$$i = 1, \dots, 2^p$$

es compatible. Procediendo de igual forma que en el teorema 4, de este capítulo se llega al sistema de 2^{p+q} -ecuaciones con 2^{p+q} -incógnitas, a $O(\varepsilon)$, siguiente:

$$-A_i f'(x_i^*) + A_{i+1} = -\alpha x_{i+1}^* + \frac{\alpha}{2} (x_{i+1-2^q}^* + x_{i+1-2^q}^*)$$

$$i = 1, \dots, 2^{p+q}$$

cuya expresión matricial es:

$$\begin{pmatrix} -f'(x_{2^q(i-1)+1,2p+q}^*) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -f'(x_{2^q(i-1)+2,2p+q}^*) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -f'(x_{2^q(i-1)+2p+1,2p+q}^*) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{2^q(i-1)+1} \\ A_{2^q(i-1)+2} \\ \vdots \\ A_{2^q(i-1)+2p+q} \end{pmatrix} = \\
 = \alpha \begin{pmatrix} -x_{2^q(i-1)+2,2p+q}^* + \frac{1}{2} \left(x_{2^q(i-2)+2,2p+q}^* + x_{2^q i+2,2p+q}^* \right) \\ -x_{2^q(i-1)+3,2p+q}^* + \frac{1}{2} \left(x_{2^q(i-2)+3,2p+q}^* + x_{2^q i+3,2p+q}^* \right) \\ \vdots \\ -x_{2^q(i-1)+1,2p+q}^* + \frac{1}{2} \left(x_{2^q(i-2)+1,2p+q}^* + x_{2^q i+1,2p+q}^* \right) \end{pmatrix}$$

Aplicando el teorema 1, de este capítulo, podemos determinar que la solución del sistema es:

$$A_k = \frac{\alpha}{1 - (f^{2p+q}(x_{1,2p+q}^*))'} \left[-x_{k,2p+q}^* + \frac{1}{2} \left(x_{k+2q,2p+q}^* + x_{k-2q,2p+q}^* \right) + \right. \\
 \left. + \sum_{n=1}^{2p+q-1} \left(\left(-x_{k+n,2p+q}^* + \frac{1}{2} \left(x_{k+n+2q,2p+q}^* + x_{k+n-2q,2p+q}^* \right) \right) \prod_{l=n}^{2p+q-1} f'(x_{k+l}^*) \right) \right] \blacksquare$$

Los teoremas 4 y 7, del capítulo actual, no ponen ninguna restricción a la órbita de periodo 2^p de f . En el caso de que f presente una órbita de periodo 2^p , esta órbita de periodo 2^p podría pertenecer a la CDP en la ventana canónica o ser una órbita saddle-node de periodo 2^p . En el primer caso f sufre una CDP, en el segundo es f^{2^p} quien sufre una CDP (esta CDP estaría localizada en la ventana 2^p periódica). La conclusión es directa: el CML no sólo tiene una onda de periodo 2^p sufriendo CDP; habrá tantas como ventanas de periodo 2^{p_1} con $p_1 \leq p$ ($p_1 \geq 2$) más la correspondiente a la ventana canónica.

Estabilidad de las órbitas.

Podemos considerar el CML

$$X_i(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{p} \sum_{j=1}^p f(X_j(n)) \quad (4.22)$$

como una perturbación del sistema

$$X_i(n+1) = f(X_i(n)) \quad (4.23)$$

por lo tanto los autovalores del CML (4.22) serían una perturbación de los autovalores del sistema (4.23). Cuando se tenga una órbita de periodo p los autovalores de (4.23) serían todos iguales a $\lambda = f^{p'}(x; r)$ y los autovalores del CML (4.22) serán $\lambda_i = \lambda + O(\varepsilon)$ $i = 1, \dots, p$ por lo tanto $\forall r / \left| f^{p'}(x; r) \right| = 1 - O(\varepsilon)$ la órbita de periodo p del CML (4.22) será estable para todo valor de r que hace que la órbita de periodo p de f sea estable salvo cuando se esté a una distancia $O(\varepsilon)$ de la bifurcación. Igual resultado se tendría si se trabajara con un CML con acoplamiento a primeros vecinos.

Capítulo 5

FORMULAS DE RECURRENCIA

Se pretende encontrar una relación de recurrencia que nos permita obtener la evolución de CML débilmente acoplado tanto en el caso de acoplamiento medio como en el caso de acoplamiento a primeros vecinos. La expresión de esta relación de recurrencia nos aportará otra visión para poder resolver la existencia de ondas viajeras, aunque las fórmulas de recurrencia no se restringen sólo a ellas. Este método puede resultar más ventajoso a la hora de su utilización numérica, aunque puede conllevar más fácilmente a una generalización errónea.

5.1. CML con acoplamiento de campo medio.

En el caso de acoplamiento medio débil, el CML adopta la forma

$$\begin{aligned} X_i(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{p} \sum_{j=1}^p f(X_j(n)) \\ i &= 1, \dots, p \quad \varepsilon \ll 1 \end{aligned} \tag{5.1}$$

se pretende encontrar puntos para el sistema (5.1), de la forma $X_i(n) = x_i^* + \varepsilon A_i$, de manera que después de p -iterados se cumpla que $X_i(n+p) = x_i^* + \varepsilon A_i$ donde $x_i^* \quad i = 1, \dots, p$ son puntos fijos

de f^p , $f^p(x_i^*) = x_i^*$. Para ello es necesario encontrar A_i .

5.1.1. Fórmula de recurrencia.

Si encontramos una expresión que nos permita saber como se transforma el oscilador $X_i(n)$ en $X_i(n+q)$ entonces aprovechándonos de la periodicidad de la solución podríamos determinar A_i . Abordaremos a continuación este problema.

Introduciendo $x_i^* + \varepsilon A_i$ en (5.1) se obtiene

$$X_i(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(x_i^* + \varepsilon A_i) + \frac{\alpha\varepsilon}{p} \sum_{j=1}^p f(x_j^* + \varepsilon A_j) \quad (5.2)$$

y expandiendo a orden ε resulta

$$X_i(n+1) = f(x_i^*) + \varepsilon \left[A_i f'(x_i^*) - \alpha f(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f(x_j^*) \right] + O(\varepsilon^2)$$

que expresamos como:

$$\begin{aligned} X_i(n+1) &= f(x_i^*) + \varepsilon t_{i_1} + O(\varepsilon^2) \\ t_{i_1} &= A_i f'(x_i^*) - \alpha f(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f(x_j^*) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Usando (5.3) resulta que el segundo iterado del sistema es:

$$\begin{aligned} X_i(n+2) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n+1)) + \frac{\alpha\varepsilon}{p} \sum_{j=1}^p f(X_j(n+1)) = \\ &= (1 - \varepsilon\alpha)f(f(x_i^*) + \varepsilon t_{i_1}) + \frac{\alpha\varepsilon}{p} \sum_{j=1}^p f(f(x_j^*)) + O(\varepsilon^2) = \\ &= f^2(x_i^*) + \varepsilon t_{i_1} f'(f(x_i^*)) - \varepsilon\alpha f^2(x_i^*) + \frac{\alpha\varepsilon}{p} \sum_{j=1}^p f^2(x_j^*) + O(\varepsilon^2) = \\ &= f^2(x_i^*) + \varepsilon \left(t_{i_1} f'(f(x_i^*)) - \alpha f^2(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f^2(x_j^*) \right) + O(\varepsilon^2) = \\ &= f^2(x_i^*) + \varepsilon t_{i_2} + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} X_i(n+2) &= f^2(x_i^*) + \varepsilon t_{i_2} + O(\varepsilon^2) \\ t_{i_2} &= f'(f(x_i^*))t_{i_1} - \alpha f^2(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f^2(x_j^*) \end{aligned} \quad (5.4)$$

El resultado anterior sugiere que la expresión de un iterado arbitrario sería de la forma:

$$\begin{aligned} X_i(n+q) &= f^q(x_i^*) + \varepsilon t_{i_q} + O(\varepsilon^2) \\ t_{i_q} &= f'(f^{q-1}(x_i^*))t_{i_{q-1}} - \alpha f^q(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f^q(x_j^*) \end{aligned}$$

La expresión anterior es cierta y queda reflejada en el siguiente teorema:

Teorema 1

El CML

$$\begin{aligned} X_i(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{p} \sum_{j=1}^p f(X_j(n)) \\ i &= 1, \dots, p \quad \varepsilon \ll 1 \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales

$$X_i(n) = x_i^* + \varepsilon A_i$$

tras q -iterados se expresará

$$X_i(n+q) = f^q(x_i^*) + \varepsilon t_{i_q} + O(\varepsilon^2) \quad (5.5)$$

donde t_{i_q} satisface la relación de recurrencia

$$t_{i_q} = \begin{cases} A_i f'(x_i^*) - \alpha f(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f(x_j^*) & q = 1 \\ f'(f^{q-1}(x_i^*))t_{i_{q-1}} - \alpha f^q(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f^q(x_j^*) & q \geq 2 \end{cases} \quad (5.6)$$

Demostración.

Comprobaremos por inducción la validez de la expresiones dadas por (5.5) y (5.6).

i) La expresiones dadas por (5.5) y (5.6) son válidas para $q = 1$ y $q = 2$, es suficiente ver las expresiones (5.3) y (5.4)

ii) Se supone que las expresiones son válidas para $p = q$ y se demostrará que son ciertas para $p = q + 1$.

Por hipótesis de inducción se tiene que

$$X_i(n+q) = f^q(x_i^*) + \varepsilon t_{i_q} + O(\varepsilon^2)$$

donde $t_{i_q} = f'(f^{q-1}(x_i^*))t_{i_{q-1}} - \alpha f^q(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f^q(x_j^*)$

Por lo tanto resulta que

$$\begin{aligned}
 X_i(n+q+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n+q)) + \frac{\alpha\varepsilon}{p} \sum_{j=1}^p f(X_j(n+q)) = \\
 &= (1 - \varepsilon\alpha)f(f^q(x_i^*) + \varepsilon t_{i_q} + O(\varepsilon^2)) + \frac{\alpha\varepsilon}{p} \sum_{j=1}^p f(f^q(x_j^*) + \varepsilon t_{i_q} + O(\varepsilon^2)) = \\
 &= (1 - \varepsilon\alpha) \left(f(f^q(x_i^*)) + f'(f^q(x_i^*))\varepsilon t_{i_q} \right) + \frac{\alpha\varepsilon}{p} \sum_{j=1}^p f(f^q(x_j^*)) + O(\varepsilon^2) = \\
 &= f^{q+1}(x_i^*) + f'(f^q(x_i^*))\varepsilon t_{i_q} - \varepsilon\alpha f^{q+1}(x_i^*) + \frac{\alpha\varepsilon}{p} \sum_{j=1}^p f^{q+1}(x_j^*) + O(\varepsilon^2) = \\
 &= f^{q+1}(x_i^*) + \varepsilon \left(f'(f^q(x_i^*))t_{i_q} - \alpha f^{q+1}(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f^{q+1}(x_j^*) \right) + O(\varepsilon^2) = \\
 &= f^{q+1}(x_i^*) + \varepsilon t_{i_{q+1}} + O(\varepsilon^2)
 \end{aligned}$$

con $t_{i_{q+1}} = f'(f^q(x_i^*))t_{i_q} - \alpha f^{q+1}(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f^{q+1}(x_j^*)$ ■

Para que el problema esté totalmente resuelto necesitaremos encontrar una expresión explícita para t_{i_q} que nos da el siguiente teorema.

Teorema 2

La expresión explícita del término

$$t_{i_q} = f'(f^{q-1}(x_i^*))t_{i_{q-1}} - \alpha f^q(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f^q(x_j^*) \quad q \geq 2$$

es

$$\begin{aligned}
 t_{i_q} &= A_i(f^q(x_i^*))' - \alpha \left(\sum_{n=1}^{q-1} f^n(x_i^*) \prod_{k=n}^{q-1} f'(f^k(x_i^*)) \right) + \\
 &+ \frac{\alpha}{p} \sum_{n=1}^{q-1} \left(\sum_{j=1}^p f^n(x_j^*) \prod_{k=n}^{q-1} f'(f^k(x_i^*)) \right) - \alpha f^q(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{l=1}^p f^q(x_l^*)
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Demostración

La demostración se realiza por inducción.

i) Veamos que es cierto para $q = 2$.

De (5.6) se tiene que

$$t_{i_2} = f'(f(x_i^*))t_{i_1} - \alpha f^2(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f^2(x_j^*)$$

sustituyendo en la igualdad anterior la expresión de t_{i_1} , resulta

$$t_{i_2} = f'(f(x_i^*)) \left(A_i f'(x_i^*) - \alpha f(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f(x_j^*) \right) - \alpha f^2(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f^2(x_j^*)$$

operando

$$t_{i_2} = A_i f'(x_i^*) f'(f(x_i^*)) - \alpha f(x_i^*) f'(f(x_i^*)) + \frac{\alpha}{p} f'(f(x_i^*)) \sum_{j=1}^p f(x_j^*) - \alpha f^2(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f^2(x_j^*)$$

y expresándolo en función de la derivada segunda se tiene

$$t_{i_2} = A_i (f^2(x_i^*))' - \alpha f(x_i^*) f'(f(x_i^*)) + \frac{\alpha}{p} f'(f(x_i^*)) \sum_{j=1}^p f(x_j^*) - \alpha f^2(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f^2(x_j^*) \quad (5.8)$$

Al sustituir $q = 2$ en la ecuación (5.7) se obtiene

$$t_{i_2} = A_i (f^2(x_i^*))' - \alpha f(x_i^*) f'(f(x_i^*)) + \frac{\alpha}{p} \left(\sum_{j=1}^p f(x_j^*) f'(f(x_i^*)) \right) - \alpha f^2(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{l=1}^p f^2(x_l^*)$$

Esta expresión coincide con la obtenida en la ecuación (5.8)

ii) Supongamos que la igualdad (5.7) es cierta para t_{i_q} y veamos que también lo es para $t_{i_{q+1}}$.

$$t_{i_{q+1}} = f'(f^q(x_i^*)) t_{i_q} - \alpha f^{q+1}(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f^{q+1}(x_j^*)$$

Utilizando la hipótesis de inducción y sustituyendo resulta

$$\begin{aligned} t_{i_{q+1}} &= f'(f^q(x_i^*)) \left(A_i (f^q(x_i^*))' - \alpha \sum_{n=1}^{q-1} f^n(x_i^*) \prod_{k=n}^{q-1} f'(f^k(x_i^*)) \right) + \\ &+ f'(f^q(x_i^*)) \left(\frac{\alpha}{p} \sum_{n=1}^{q-1} \sum_{j=1}^p f^n(x_j^*) \prod_{k=n}^{q-1} f'(f^k(x_i^*)) - \alpha f^q(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{l=1}^p f^q(x_l^*) \right) \\ &- \alpha f^{q+1}(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f^{q+1}(x_j^*) = \\ &= A_i f'(f^q(x_i^*)) (f^q(x_i^*))' - \alpha \left(f'(f^q(x_i^*)) \sum_{n=1}^{q-1} f^n(x_i^*) \prod_{k=n}^{q-1} f'(f^k(x_i^*)) \right) + \\ &+ \frac{\alpha}{p} \sum_{n=1}^{q-1} f'(f^q(x_i^*)) \sum_{j=1}^p f^n(x_j^*) \prod_{k=n}^{q-1} f'(f^k(x_i^*)) - \alpha f'(f^q(x_i^*)) f^q(x_i^*) + \\ &+ \frac{\alpha}{p} f'(f^q(x_i^*)) \sum_{l=1}^p f^q(x_l^*) - \alpha f^{q+1}(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f^{q+1}(x_j^*) = \\ &= A_i (f^{q+1}(x_i^*))' - \alpha \left(\sum_{n=1}^{q-1} f^n(x_i^*) \prod_{k=n}^q f'(f^k(x_i^*)) \right) + \\ &+ \frac{\alpha}{p} \sum_{n=1}^{q-1} \sum_{j=1}^p f^n(x_j^*) \prod_{k=n}^q f'(f^k(x_i^*)) - \alpha f'(f^q(x_i^*)) f^q(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} f'(f^q(x_i^*)) \sum_{l=1}^p f^q(x_l^*) \\ &- \alpha f^{q+1}(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f^{q+1}(x_j^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= A_i (f^{q+1}(x_i^*))' - \alpha \left(\sum_{n=1}^q f^n(x_i^*) \prod_{k=n}^q f'(f^k(x_i^*)) \right) + \\
 &\frac{\alpha}{p} \sum_{n=1}^q \sum_{j=1}^p f^n(x_j^*) \prod_{k=n}^q f'(f^k(x_i^*)) - \alpha f^{q+1}(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f^{q+1}(x_j^*) \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

5.1.2. Onda periódica

Como hemos indicado anteriormente, ahora estamos en condiciones de obtener el valor A_i , que nos permitirá determinar una solución periódica de la forma $x_i^* + A_i$.

En el siguiente teorema se muestra el proceso para la obtención de estos valores de A_i .

Teorema 3

Sea $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*\}$ una órbita de periodo p de f siendo $f \in C^2$ tal que $f^{p'}(x_i^*) \neq 1 \quad i = 1, \dots, p$ entonces el CML dado por

$$\begin{aligned}
 X_i(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{p} \sum_{j=1}^p f(X_j(n)) \\
 i &= 1, \dots, p \quad \varepsilon \ll 1
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

presenta una solución periódica de periodo p , dada por

$$\begin{aligned}
 X_i(n+j) &= x_{i+j}^* + \varepsilon A_{i+j} + O(\varepsilon^2) \\
 i &= 1, \dots, p \\
 j &\in \mathbb{N}^*
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 A_i &= \frac{\alpha}{(1 - (f^p(x_i^*))')} \left[\sum_{n=1}^{p-1} \left(\left(-x_{i+n}^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \right) \prod_{k=n}^{p-1} f'(x_{i+k}^*) \right) - x_i^* + \frac{1}{p} \sum_{l=1}^p x_l^* \right] \\
 i &= 1, \dots, p
 \end{aligned}$$

con condiciones de periodicidad

$$\begin{aligned}
 A_{i+p} &= A_i \\
 x_{i+p}^* &= x_i^* \quad \forall i
 \end{aligned}$$

y $(1 - (f^p(x_i^*))')$ es $O(1)$.

Demostración

Para que $X_i(n) = x_i^* + \varepsilon A_i + O(\varepsilon^2)$ sea una solución de periodo p para el CML, después de p -iterados se tendrá que cumplir que $X_i(n+p) = x_i^* + \varepsilon A_i + O(\varepsilon^2)$

Utilizando (5.5) del teorema 1 y (5.7) del teorema 2 se tiene

$$X_i(n+p) = f^p(x_i^*) + \varepsilon \left(A_i (f^p(x_i^*))' - \alpha \sum_{n=1}^{p-1} f^n(x_i^*) \prod_{k=n}^{p-1} f'(f^k(x_i^*)) + \frac{\alpha}{p} \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{j=1}^p f^n(x_j^*) \prod_{k=n}^{p-1} f'(f^k(x_i^*)) - \alpha f^p(x_i^*) + \frac{\alpha}{p} \sum_{l=1}^p f^p(x_l^*) \right) + O(\varepsilon^2)$$

$$\text{y como } \begin{cases} f^p(x_i^*) = x_i^* \\ f^n(x_i^*) = x_{i+n}^* & \text{si } n < p \\ \sum_{j=1}^p f^n(x_j^*) = \sum_{j=1}^p x_j^* \end{cases} \text{ se tiene:}$$

$$x_i^* + \varepsilon A_i + O(\varepsilon^2) = x_i^* + \varepsilon \left(A_i (f^p(x_i^*))' - \alpha \sum_{n=1}^{p-1} x_{i+n}^* \prod_{k=n}^{p-1} f'(f^k(x_i^*)) + \frac{\alpha}{p} \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{j=1}^p x_j^* \prod_{k=n}^{p-1} f'(f^k(x_i^*)) - \alpha x_i^* + \frac{\alpha}{p} \sum_{l=1}^p x_l^* \right) + O(\varepsilon^2)$$

resolviendo a orden ε se encuentra

$$(1 - (f^p(x_i^*))') A_i = -\alpha \sum_{n=1}^{p-1} x_{i+n}^* \prod_{k=n}^{p-1} f'(f^k(x_i^*)) + \frac{\alpha}{p} \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{j=1}^p x_j^* \prod_{k=n}^{p-1} f'(x_{i+k}^*) - \alpha x_i^* + \frac{\alpha}{p} \sum_{l=1}^p x_l^*$$

agrupando términos resulta

$$(1 - (f^p(x_i^*))') A_i = \sum_{n=1}^{p-1} \left(-\alpha x_{i+n}^* + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \right) \prod_{k=n}^{p-1} f'(x_{i+k}^*) - \alpha x_i^* + \frac{\alpha}{p} \sum_{l=1}^p x_l^*$$

y despejando se deduce finalmente que

$$A_i = \frac{\alpha}{(1 - (f^p(x_i^*))')} \left[\sum_{n=1}^{p-1} \left(\left(-x_{i+n}^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \right) \prod_{k=n}^{p-1} f'(x_{i+k}^*) \right) - x_i^* + \frac{1}{p} \sum_{l=1}^p x_l^* \right]$$

El valor de A_i se podrá obtener cuando $1 - (f^p(x_i^*))'$ sea de $O(1)$, es decir, los puntos no pertenecían a una órbita saddle-node, o próxima a su generación. ■

Este resultado nos ha permitido encontrar el valor de A_i , ya obtenido en el teorema 5 del capítulo 4, por medio de unas técnicas totalmente diferentes a las usadas en aquel capítulo. Tenemos, pues, dos técnicas para encarar el mismo problema.

Las técnicas matriciales, son más adecuadas para probar la existencia y unicidad de soluciones,

y las técnicas iterativas son más útiles para hallar la expresión explícita de tales soluciones. Otra ventaja de las técnicas iterativas es su sencilla implantación en el ordenador, ya que su forma les hace propicias para ello.

5.2. CML con acoplamiento a primeros vecinos

Los anteriores resultados han sido obtenidos en CML con acoplamiento de campo medio, procederemos a realizar un estudio similar cuando se trabaja con CML con acoplamiento a primeros vecinos.

5.2.1. Fórmula de recurrencia

Teorema 4

El CML

$$\begin{aligned} X_i(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2}(f(X_{i+1}(n)) + f(X_{i-1}(n))) \\ i &= 1, \dots, p \quad \varepsilon \ll 1 \end{aligned} \quad (5.10)$$

con las condiciones iniciales

$$X_i(n) = x_i^* + \varepsilon A_i$$

tras $(q-1)$ -iterados se expresará

$$X_i(n+q) = f^q(x_i^*) + \varepsilon t_{i_q} + O(\varepsilon^2) \quad (5.11)$$

donde t_{i_q} satisface la relación de recurrencia

$$t_{i_q} = \begin{cases} A_i f'(x_i^*) - \alpha f(x_i^*) + \left(\frac{\alpha}{2} f(x_{i+1}^*) + f(x_{i-1}^*)\right) & q = 1 \\ f'(f^{q-1}(x_i^*)) t_{i_{q-1}} - \alpha f^q(x_i^*) + \left(\frac{\alpha}{2} f^q(x_{i+1}^*) + f^q(x_{i-1}^*)\right) & q \geq 2 \end{cases} \quad (5.12)$$

Demostración.

Se comprobará por inducción la validez de las expresiones dadas por (5.11) y (5.12).

En primer lugar, veamos que es cierta par $q = 1$.

Como $X_i(n) = x_i^* + \varepsilon A_i$, se tiene sustituyendo en (5.10)

$$X_i(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(x_i^* + \varepsilon A_i) + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (f(x_{i+1}^* + \varepsilon A_{i+1}) + f(x_{i-1}^* + \varepsilon A_{i-1}))$$

agrupando resulta

$$X_i(n+1) = f(x_i^*) + \varepsilon \left[A_i f'(x_i^*) - \alpha f(x_i^*) + \frac{\alpha}{2} (f(x_{i+1}^*) + f(x_{i-1}^*)) \right] + O(\varepsilon^2)$$

por tanto se tiene que

$$X_i(n+1) = f(x_i^*) + \varepsilon t_{i_1} + O(\varepsilon^2)$$

con

$$t_{i_1} = A_i f'(x_i^*) - \alpha f(x_i^*) + \frac{\alpha}{2} (f(x_{i+1}^*) + f(x_{i-1}^*))$$

Supongamos que la expresión (5.12) es válida para t_{i_q} y se demostrará que es cierta para $t_{i_{q+1}}$.

Por hipótesis de inducción se tiene que

$$X_i(n+q) = f^q(x_i^*) + \varepsilon t_{i_q} + O(\varepsilon^2)$$

donde

$$t_{i_q} = f'(f^{q-1}(x_i^*))t_{i_{q-1}} - \alpha f^q(x_i^*) + \left(\frac{\alpha}{2} f^q(x_{i+1}^*) + f^q(x_{i-1}^*) \right)$$

por lo tanto resulta que

$$X_i(n+q+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n+q)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (f(X_{i+1}(n+q)) + f(X_{i-1}(n+q)))$$

entonces aplicando la hipótesis de inducción se deduce que

$$X_i(n+q+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(f^q(x_i^*) + \varepsilon t_{i_q}) + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (f(f^q(x_{i+1}^*)) + f(f^q(x_{i-1}^*))) + O(\varepsilon^2)$$

$$X_i(n+q+1) = (1-\varepsilon\alpha)f(f^q(x_i^*) + \varepsilon t_{i_q}) + \\ + \frac{\alpha\varepsilon}{2}(f(f^q(x_{i+1}^*)) + f(f^q(x_{i-1}^*))) + O(\varepsilon^2)$$

desarrollando la igualdad anterior

$$X_i(n+q+1) = (1-\varepsilon\alpha)(f(f^q(x_i^*)) + f'(f^q(x_i^*))\varepsilon t_{i_q}) + \\ + \frac{\alpha\varepsilon}{2}(f(f^q(x_{i+1}^*)) + f(f^q(x_{i-1}^*))) + O(\varepsilon^2)$$

y agrupando términos resulta

$$X_i(n+q+1) = f^{q+1}(x_i^*) + \varepsilon(f'(f^q(x_i^*))t_{i_q} - \alpha f^{q+1}(x_i^*) \\ + \frac{\alpha}{2}(f^{q+1}(x_{i+1}^*) + f^{q+1}(x_{i-1}^*))) + O(\varepsilon^2)$$

por lo tanto se obtiene que

$$X_i(n+q+1) = f^{q+1}(x_i^*) + \varepsilon t_{i_{q+1}} + O(\varepsilon^2)$$

con

$$t_{i_{q+1}} = f'(f^q(x_i^*))t_{i_q} - \alpha f^{q+1}(x_i^*) + \frac{\alpha}{2}(f^{q+1}(x_{i+1}^*) + f^{q+1}(x_{i-1}^*)) \quad \blacksquare$$

Se procederá a continuación a obtener la expresión explícita del término t_{i_q} para CML con acoplamiento a primeros vecinos.

Teorema 5

La expresión explícita del término

$$t_{i_q} = f'(f^{q-1}(x_i^*))t_{i_{q-1}} - \alpha f^q(x_i^*) + \frac{\alpha}{2}(f^q(x_{i+1}^*) + f^q(x_{i-1}^*)) \quad q \geq 2$$

es

$$\begin{aligned}
 t_{i_q} = & A_i (f^q(x_i^*))' - \alpha \sum_{n=1}^{q-1} f^n(x_i^*) \prod_{k=n}^{q-1} f'(f^k(x_i^*)) + \\
 & + \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^{q-1} \left((f^n(x_{i+1}^*) + f^n(x_{i-1}^*)) \prod_{k=n}^{q-1} f'(f^k(x_i^*)) \right) - \alpha f^q(x_i^*) + \frac{\alpha}{2} (f^q(x_{i+1}^*) + f^q(x_{i-1}^*))
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Demostración

La demostración se realiza por inducción.

i) Veamos que es cierto para $q = 2$.

De (5.12) se tiene que

$$t_{i_2} = f'(f(x_i^*))t_{i_1} - \alpha f^2(x_i^*) + \frac{\alpha}{2} (f^2(x_{i+1}^*) + f^2(x_{i-1}^*))$$

y utilizando la expresión de t_{i_1} se tiene

$$\begin{aligned}
 t_{i_2} = & f'(f(x_i^*)) (A_i f'(x_i^*) - \alpha f(x_i^*) + \frac{\alpha}{2} (f(x_{i+1}^*) + f(x_{i-1}^*))) + \\
 & - \alpha f^2(x_i^*) + \frac{\alpha}{2} (f^2(x_{i+1}^*) + f^2(x_{i-1}^*))
 \end{aligned}$$

operando

$$\begin{aligned}
 t_{i_2} = & A_i f'(f(x_i^*)) f'(x_i^*) - \alpha f(x_i^*) f'(f(x_i^*)) + \frac{\alpha}{2} f'(f(x_i^*)) (f(x_{i+1}^*) + f(x_{i-1}^*)) \\
 & - \alpha f^2(x_i^*) + \frac{\alpha}{2} (f^2(x_{i+1}^*) + f^2(x_{i-1}^*))
 \end{aligned}$$

expresándolo en función de la derivada segunda de f^2 se tiene

$$\begin{aligned}
 t_{i_2} = & A_i (f^2(x_i^*))' - \alpha f(x_i^*) f'(f(x_i^*)) + \frac{\alpha}{2} (f(x_{i+1}^*) + f(x_{i-1}^*)) f'(f(x_i^*)) + \\
 & - \alpha f^2(x_i^*) + \frac{\alpha}{2} (f^2(x_{i+1}^*) + f^2(x_{i-1}^*))
 \end{aligned}$$

Al sustituir $q = 2$ en la ecuación (5.13) se obtiene la misma expresión.

ii) Supongamos que la igualdad (5.13) es cierta para t_{i_q} y veamos que también lo es para $t_{i_{q+1}}$.

$$t_{i_{q+1}} = f'(f^q(x_i^*)) t_{i_q} - \alpha f^{q+1}(x_i^*) + \frac{\alpha}{2} (f^{q+1}(x_{i+1}^*) + f^{q+1}(x_{i-1}^*))$$

resulta

$$\begin{aligned} t_{i_{q+1}} &= f'(f^q(x_i^*)) \left(A_i(f^q(x_i^*))' - \alpha \sum_{n=1}^{q-1} f^n(x_i^*) \prod_{k=n}^{q-1} f'(f^k(x_i^*)) + \right. \\ &+ \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^{q-1} \left((f^n(x_{i+1}^*) + f^n(x_{i-1}^*)) \prod_{k=n}^{q-1} f'(f^k(x_i^*)) \right) - \alpha f^q(x_i^*) + \frac{\alpha}{2} (f^q(x_{i+1}^*) + f^q(x_{i-1}^*)) \Big) + \\ &\quad \left. - \alpha f^{q+1}(x_i^*) + \frac{\alpha}{2} (f^{q+1}(x_{i+1}^*) + f^{q+1}(x_{i-1}^*)) \right) = \\ &= f'(f^q(x_i^*)) A_i(f^q(x_i^*))' - \alpha \sum_{n=1}^{q-1} f^n(x_i^*) \prod_{k=n}^{q-1} f'(f^k(x_i^*)) + \\ &+ \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^{q-1} \left((f^n(x_{i+1}^*) + f^n(x_{i-1}^*)) \prod_{k=n}^{q-1} f'(f^k(x_i^*)) \right) - \alpha f^q(x_i^*) + \frac{\alpha}{2} (f^q(x_{i+1}^*) + f^q(x_{i-1}^*)) \\ &\quad - \alpha f^{q+1}(x_i^*) + \frac{\alpha}{2} (f^{q+1}(x_{i+1}^*) + f^{q+1}(x_{i-1}^*)) = \\ &= f'(f^q(x_i^*)) A_i(f^q(x_i^*))' - \alpha \sum_{n=1}^q f^n(x_i^*) \prod_{k=n}^q f'(f^k(x_i^*)) + \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^q \left((f^n(x_{i+1}^*) + f^n(x_{i-1}^*)) \prod_{k=n}^q f'(f^k(x_i^*)) \right) \\ &\quad - \alpha f^{q+1}(x_i^*) + \frac{\alpha}{2} (f^{q+1}(x_{i+1}^*) + f^{q+1}(x_{i-1}^*)) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5.2.2. Onda periódica

Para determinar la solución periódica de la onda en CML con acoplamiento a primeros vecinos necesitamos obtener el valor de A_i , proceso que se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 6

Sea $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*\}$ una órbita de período p de f siendo $f \in C^2$ tal que $f^{p'}(x_i^*) \neq 1 \quad i = 1, \dots, p$ entonces el CML dado por

$$X_i(n+1) = (1 - \varepsilon \alpha) f(X_i(n)) + \frac{\alpha \varepsilon}{2} (f(X_{i+1}(n)) + f(X_{i-1}(n)))$$

$$i = 1, \dots, p \quad \varepsilon \ll 1$$

$$X_{i+p}(n) = X_i(n)$$

presenta una solución periódica de periodo p , dada por

$$\begin{aligned} X_i(n+j) &= x_{i+j}^* + \varepsilon A_{i+j} + O(\varepsilon^2) \\ i &= 1, \dots, p \end{aligned}$$

donde

$$A_i = \frac{\alpha}{(1 - (f^p(x_i^*))')} \left[\sum_{n=1}^{p-1} \left((-x_{i+n}^* + \frac{1}{2} (x_{i+1+n}^* + x_{i-1+n}^*)) \prod_{k=n}^{p-1} f'(x_{i+k}^*) \right) + \right. \\ \left. -x_i^* + \frac{1}{2} (x_{i+1}^* + x_{i-1}^*) \right]$$

$$i = 1, \dots, p$$

con condiciones de periodicidad

$$\begin{aligned} A_{i+p} &= A_i \\ x_{i+p}^* &= x_i^* \end{aligned} \quad \forall i$$

y $(1 - (f^p(x_i^*))')$ es $O(1)$.

Demostración

Para que $X_i(n) = x_i^* + \varepsilon A_i + O(\varepsilon^2)$ sea una solución de periodo p se tendrá que verificar que $X_i(n+p) = x_i^* + \varepsilon A_i + O(\varepsilon^2)$.

Utilizando (5.11) del teorema 4 y (5.13) del teorema 5, se tiene

$$\begin{aligned} X_i(n+p) &= f^p(x_i^*) + \varepsilon \left(A_i (f^p(x_i^*))' - \alpha \sum_{n=1}^{p-1} f^n(x_i^*) \prod_{k=n}^{p-1} f'(f^k(x_i^*)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^{p-1} \left((f^n(x_{i+1}^*) + f^n(x_{i-1}^*)) \prod_{k=n}^{p-1} f'(f^k(x_i^*)) \right) - \alpha f^p(x_i^*) \right) \\ &\quad \left. + \frac{\alpha \varepsilon}{2} (f^p(x_{i+1}^*) + f^p(x_{i-1}^*)) + O(\varepsilon^2) \right) \end{aligned}$$

y como $\begin{cases} f^p(x_i^*) = x_i^* \\ f^n(x_i^*) = x_{i+n}^* \quad \text{si } n < p \end{cases}$
se tiene

$$\begin{aligned} x_i^* + \varepsilon A_i + O(\varepsilon^2) &= x_i^* + \varepsilon \left(A_i (f^p(x_i^*))' - \alpha \sum_{n=1}^{p-1} f^n(x_i^*) \prod_{k=n}^{p-1} f'(f^k(x_i^*)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^{p-1} \left((f^n(x_{i+1}^*) + f^n(x_{i-1}^*)) \prod_{k=n}^{p-1} f'(f^k(x_i^*)) \right) - \alpha f^p(x_i^*) \right) \\ &\quad \left. + \frac{\alpha \varepsilon}{2} (f^p(x_{i+1}^*) + f^p(x_{i-1}^*)) + O(\varepsilon^2) \right) \end{aligned}$$

Resolviendo a orden ε resulta

$$\begin{aligned} (1 - (f^p(x_i^*))') A_i &= -\alpha \left(\sum_{n=1}^{p-1} f^n(x_i^*) \prod_{k=n}^{p-1} f'(f^k(x_i^*)) \right) + \\ &+ \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^{p-1} \left((f^n(x_{i+1}^*) + f^n(x_{i-1}^*)) \prod_{k=n}^{p-1} f'(f^k(x_i^*)) \right) - \alpha(x_i^*) \\ &+ \frac{\alpha\varepsilon}{2} (x_{i+1}^* + x_{i-1}^*) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - (f^p(x_i^*))') A_i &= -\alpha \left(\sum_{n=1}^{p-1} x_{i+n}^* \prod_{k=n}^{p-1} f'(f(x_{i+k}^*)) \right) + \\ &+ \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^{p-1} \left((x_{i+1+n}^* + x_{i-1+n}^*) \prod_{k=n}^{p-1} f'(f^k(x_i^*)) \right) - \alpha x_i^* \\ &+ \frac{\alpha\varepsilon}{2} (x_{i+1}^* + x_{i-1}^*) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - (f^p(x_i^*))') A_i &= \alpha \left[\sum_{n=1}^{p-1} (-x_{i+n}^* + \frac{1}{2} (x_{i+1+n}^* + x_{i-1+n}^*)) \prod_{k=n}^{p-1} f'(f(x_{i+k}^*)) + \right. \\ &\left. -x_i^* + \frac{1}{2} (x_{i+1}^* + x_{i-1}^*) \right] \end{aligned}$$

Despejando A_i se obtiene:

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\alpha}{1 - (f^p(x_i^*))'} \left[\sum_{n=1}^{p-1} (-x_{i+n}^* + \frac{1}{2} (x_{i+1+n}^* + x_{i-1+n}^*)) \prod_{k=n}^{p-1} f'(f(x_{i+k}^*)) + \right. \\ &\left. -x_i^* + \frac{1}{2} (x_{i+1}^* + x_{i-1}^*) \right] \end{aligned}$$

tal y como queríamos demostrar.

El valor de A_i se podrá obtener cuando $1 - (f^p(x_i^*))'$ sea $O(1)$. ■

Este resultado nos ha permitido encontrar el valor de A_i que coincide con el que se obtuvo en el teorema 10 del capítulo 3.

Capítulo 6

ESTUDIO ANALÍTICO DE CLUSTER EN CML CON ACOPLAMIENTO DÉBIL

Las estructuras ordenadas [3], de evolución caótica o regular, son muy frecuentes en los sistemas donde se produce la interacción entre sus elementos constituyentes. Intuitivamente, este fenómeno se observará en la división en dominios magnéticos de un material [4], en la escisión de una bandada de estorninos en dos grupos que siguen realizando acrobacias aéreas (muy común en primavera), las estructuras arenosas de la playa producidas por el oleaje y las dunas son otros ejemplos [81]. Nuestros resultados permiten estudiar estructuras ordenadas, su evolución y bifurcación. Este capítulo está dedicado a ese fin. De hecho, los clusters se han observado numéricamente, de manera abundante, en CML. Los resultados analíticos de este capítulo les darán una base matemática rigurosa.

En el capítulo 4, se dieron las expresiones analíticas de ondas en CML, tanto con acoplamiento medio como con acoplamiento a primeros vecinos. Estos resultados se pueden generalizar a clusters en CML. Si en un CML se imponen las mismas condiciones iniciales a distintos osciladores entonces bajo determinadas circunstancias se forman patterns en el sistema. Los patterns estarán formados

por grupos de osciladores, cada uno de los cuales tiene las mismas condiciones iniciales, y además cada grupo de osciladores (con las mismas condiciones iniciales) evoluciona como si fueran un único oscilador.

En consecuencia se pueden probar que los patterns muestran ondas periódicas, y que el periodo de estas ondas sufre CDP. Las CDP de patterns fueron primeramente observados numéricamente en [42] por Kaneko.

En los anteriores resultados se ha trabajado en un CML que contenía un conjunto de k -osciladores $\{X_j(n)\}_{j=1,\dots,k}$, donde $X_j(n)$ representaba el estado del oscilador j -ésimo en el instante n . Para estudiar CML que muestren diferentes patterns en evolución, se considerará la agrupación ordenada de m -grupos de k -osciladores que representaremos con la siguiente notación

NOTACIÓN 1. Se denota por $\{X_i^\nu(n)\}_{\nu=1,\dots,m} \ i=1,\dots,k$ al grupo de mk -osciladores constituido por m subgrupos de k osciladores cada uno, donde $X_i^\nu(n)$ representará el estado del oscilador i -ésimo situado en el ν -ésimo grupo en el instante n . Por lo tanto los mk -osciladores quedarán caracterizados indicando el grupo ν -ésimo en el cuál están y la posición i -ésima dentro de ese grupo. Cada conjunto de osciladores tal que para el mismo instante n tienen el mismo estado es lo que en [64] denominan cluster.

En particular, para nuestro estudio tendrán especial interés los siguientes patrones a los que denominaremos cluster tipo I y tipo II:

Cluster tipo I

$$X_i^\nu(n) = x_\nu \quad \forall i$$

es decir,

$$\{X_i^\nu(n)\}_{\nu=1,\dots,m} \ i=1,\dots,k = \left\{ \overbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}^{\nu=1} \overbrace{x_2, x_2, \dots, x_2}^{\nu=2}, \dots, \overbrace{x_m, x_m, \dots, x_m}^{\nu=m} \right\}$$

Cluster tipo II

$$X_i^\nu(n) = x_i \quad \forall \nu$$

es decir,

$$\{X_i^\nu(n)\}_{\nu=1,\dots,m} \quad i=1,\dots,k = \left\{ \overbrace{x_1, x_2, \dots, x_k}^{\nu=1}, \overbrace{x_1, x_2, \dots, x_k}^{\nu=2}, \dots, \overbrace{x_1, x_2, \dots, x_k}^{\nu=m} \right\}$$

Obsérvese que los osciladores que constituyen el cluster pueden o no estar en el mismo subgrupo. Por ejemplo, en el cluster tipo I los osciladores que presentan la misma evolución son los que están inicialmente dentro de un mismo subgrupo ν . El cluster tipo II, estará constituido por los osciladores que dentro de cada subgrupo están en la posición i -ésima.

6.1. Onda viajera en cluster de tipo I.

6.1.1. Onda viajera en cluster tipo I con acoplamiento medio

6.1.1.1. Teorema 1. Onda viajera.

Sea $f(x; r) : I \rightarrow I$, una función de clase C^2 dependiente de un parámetro, y $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*\}$ una órbita de período p de f tal que $1 - f^{p'}(x_i^*)$ es $O(1) \quad i = 1, \dots, p$

Sea el CML

$$\begin{aligned} X_i^\nu(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{mp} \sum_{\nu=1}^p \sum_{i=1}^m f(X_i^\nu(n)) \\ i &= 1, \dots, m \quad \nu = 1, \dots, p \quad \varepsilon \ll 1 \end{aligned} \tag{6.1}$$

con las condiciones iniciales

$$X_i^\nu(n) = x_\nu^* + \varepsilon A_\nu + O(\varepsilon^2)$$

con

$$\left\{ \begin{array}{l} f^p(x_\nu^*) = x_\nu^* \\ A_\nu = \frac{1}{-1+(f^p(x_1^*))} \left[\sum_{n=1}^{p-1} \left(-x_{\nu+n}^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \right) \prod_{l=n}^{p-1} f'(x_{\nu+l}^*) + \right. \\ \left. + \left(-x_\nu^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \right) \right] \\ i = 1, \dots, m \quad \nu = 1, \dots, p \end{array} \right.$$

entonces el CML presenta p -cluster $\{X_i^\nu(n)\}_{\nu=1, \dots, p}$ los cuales evolucionan describiendo una onda periódica de periodo p dada por $X_i^\nu(n+1) = X_i^{\nu+1}(n)$ verificando $X_i^\nu(n+p) = X_i^\nu(n)$.

Demostración

Con las condiciones iniciales dadas, el estado inicial del CML es un cluster del tipo I (todos los osciladores de un mismo subgrupo ν toman inicialmente el mismo valor y por lo tanto su evolución temporal es idéntica). Para que los cluster evolucionen describiendo una onda de periodo p , es necesario que todo oscilador de un mismo subgrupo evolucione describiendo la misma onda. Esto se cumple si la evolución temporal de los osciladores en el CML, a $O(\varepsilon)$, es de la forma siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i^\nu(n) = x_\nu^* + \varepsilon A_\nu \\ X_i^\nu(n+1) = x_{\nu+1}^* + \varepsilon A_{\nu+1} \\ \vdots \\ X_i^\nu(n+p-1) = x_{\nu+p-1}^* + \varepsilon A_{\nu+p-1} = x_{\nu-1}^* + \varepsilon A_{\nu-1} \\ X_i^\nu(n+p) = x_\nu^* + \varepsilon A_\nu \end{array} \right. \quad i = 1, \dots, m, \quad \nu = 1, \dots, p \quad (6.2)$$

Es decir, independientemente de " i " todos los osciladores con un mismo ν están regidos por las mismas ecuaciones de evolución.

Para que el sistema (6.2) presente dicha evolución es necesario que sea un sistema compatible determinado, del cual se podrán deducir los valores de A_ν . Deducidos los valores de A_ν la solución

quedará perfectamente descrita por

$$\begin{cases} X_i^\nu(n+j) = x_{\nu+j}^* + \varepsilon A_{\nu+j} + O(\varepsilon^2) \\ x_\nu^* = x_{\nu+p}^* \quad A_\nu = A_{\nu+p} \\ i = 1, \dots, m, \quad \nu = 1, \dots, p \quad j \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Primeramente procederemos a estudiar como son las ecuaciones de evolución en este CML. Dado que todos los osciladores del subgrupo ν -ésimo toman inicialmente el mismo valor

$$X_i^\nu(n) = x_\nu^* + \varepsilon A_\nu + O(\varepsilon^2) \quad i = 1, \dots, m$$

se cumple que

$$\sum_{i=1}^m f(X_i^\nu(n)) = m f(X_i^\nu(n))$$

y por tanto

$$\frac{\alpha\varepsilon}{mp} \sum_{\nu=1}^p \sum_{i=1}^m f(X_i^\nu(n)) = \frac{\alpha\varepsilon}{mp} \sum_{\nu=1}^p m f(X_i^\nu(n))$$

Introduciendo este resultado en (6.1) y simplificando se obtiene:

$$\begin{aligned} X_i^\nu(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha) f(X_i^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{p} \sum_{\nu=1}^p f(X_i^\nu(n)) \\ i &= 1, \dots, m \quad \nu = 1, \dots, p \quad \varepsilon \ll 1 \end{aligned} \tag{6.3}$$

donde se observa que $\forall i = 1, \dots, m$ las ecuaciones del sistema (6.3) son

$$X_i^\nu(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha) f(x_\nu^* + \varepsilon A_\nu + O(\varepsilon^2)) + \frac{\alpha\varepsilon}{p} \sum_{\nu=1}^p f(x_\nu^* + \varepsilon A_\nu + O(\varepsilon^2))$$

por lo que la evolución no depende del índice "i", reflejando el hecho esperado de que todos los osciladores de dicho grupo evolucionan idénticamente. Es decir, basta observar la evolución de un oscilador del grupo ν para conocer la evolución de los osciladores pertenecientes a ese grupo.

El sistema (6.3) que rige la evolución de este CML es idéntica a la ecuación (4.2) que describía la evolución de ν -osciladores. Este hecho nos lleva a la conclusión de la existencia de solución para el sistema (6.3). Por lo tanto el sistema se comporta fenomenológicamente igual que un sistema de ν -osciladores cada uno de ellos colocado inicialmente en $x_\nu^* + \varepsilon A_\nu + O(\varepsilon^2)$ siendo $f^p(x_\nu^*) = x_\nu^*$, es decir, los osciladores describen una onda de periodo p .

En consecuencia, queda probada la existencia de órbita de periodo p para este cluster. Como cada cluster realiza una onda del mismo periodo, el resultado es que todos los cluster evolucionan periódicamente, manteniendo un desfase igual al de las condiciones iniciales. ■

6.1.1.2. Cascada de duplicación de periodo de ondas viajeras en cluster de tipo I

En los CML con acoplamiento débil se ha comprobado la existencia de la onda viajera así como la existencia de la CDP para dichas ondas, cabe preguntarse si dicho comportamiento se va a reproducir en los cluster de tipo I, cuestión que se analiza en este apartado. Primeramente se demostrará la existencia de la bifurcación de duplicación de periodo para los cluster tipo I, y posteriormente procederemos al análisis de la existencia de la CDP.

Bifurcación de la onda viajera en cluster tipo I con acoplamiento medio

En el siguiente teorema se demuestra la existencia de la bifurcación de duplicación de periodo en los cluster de tipo I.

Teorema 2. Existencia de la bifurcación de duplicación de periodo en cluster tipo I.

Sea $f(x; r) : I \rightarrow I$, una función de clase C^2 dependiente de un parámetro, en función del cual la órbita de periodo 2^p $p \in \mathbb{N}$ del sistema $x_{n+1} = f(x_n)$ sufre una bifurcación de duplicación de periodo.

El CML dado por

$$X_i^\nu(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{m2^p} \sum_{\nu=1}^{2^p} \sum_{i=1}^m f(X_i^\nu(n)) \quad (6.4)$$

$$\nu = 1, \dots, 2^p \quad \varepsilon \ll 1 \quad i = 1, \dots, m$$

con condiciones iniciales

$$X_i^\nu(n) = x_{2\nu-1, 2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2\nu-1} + O(\varepsilon^2)$$

con

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{2^{p+1}}(x_{2\nu-1, 2^{p+1}}^*) = x_{2\nu-1, 2^{p+1}}^* \\ A_k = \frac{\alpha}{-1 + \left(f^{2^{p+1}}(x_{1, 2^{p+1}}^*)\right)'} \left[\sum_{n=1}^{2^{p+1}-1} \left((-x_{k+n, 2^{p+1}}^* + \frac{1}{2^p} S_{k+n}) \right. \right. \\ \left. \left. \prod_{l=n}^{2^{p+1}-1} f'(x_{k+l, 2^{p+1}}^*) \right) - x_{k, 2^{p+1}}^* + \frac{1}{2^p} S_k \right) \\ S_j = \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{2^p} x_{2(\nu-1)+2, 2^{p+1}}^* & j = \dot{2} \\ \sum_{\nu=1}^{2^p} x_{2(\nu-1)+1, 2^{p+1}}^* & j = \dot{2} + 1 \end{cases} \\ \nu = 1, \dots, 2^p \quad i = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, 2^{p+1} \end{array} \right.$$

y $\left(-1 + \left(f^{2^{p+1}}(x_{1, 2^{p+1}}^*)\right)'\right)$ es $O(1)$, presenta 2^p -cluster $\{X_i^\nu(n)\}_{\nu=1, \dots, 2^p}$ los cuáles evolucionan describiendo una onda periódica de periodo 2^{p+1} dada por $X_i^\nu(n+2) = X_i^{\nu+1}(n)$ cumpliéndose $X_i^\nu(n+2^{p+1}) = X_i^\nu(n)$

Demostración

Para que los cluster evolucionen describiendo una onda de periodo 2^{p+1} , se deberá cumplir que la evolución temporal de cada uno de los $m2^p$ -osciladores sea de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i^\nu(n+j) = x_{2\nu-1+j, 2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2\nu-1+j} + O(\varepsilon^2) \\ x_{k, 2^{p+1}}^* = x_{k+2^{p+1}, 2^{p+1}}^* \quad A_k = A_{k+2^{p+1}} \\ \nu = 1, \dots, 2^p \quad i = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, 2^{p+1} \quad j \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

Para ello es necesario probar que los sistemas con 2^{p+1} -ecuaciones que nos determinan la evolución de los osciladores, a $O(\varepsilon)$, sean compatibles determinados, y de ellos se puedan obtener los valores de A_k , $k = 1 \dots 2^{p+1}$. Por hipótesis del teorema, los m osciladores localizados en el subgrupo ν -ésimo toman inicialmente el mismo valor, por lo que

$$\sum_{\nu=1}^{2^p} \sum_{i=1}^m f(X_i^\nu(n)) = \sum_{\nu=1}^{2^p} m f(X_i^\nu(n))$$

y por tanto :

$$\frac{\alpha\varepsilon}{m2^p} \sum_{\nu=1}^{2^p} \sum_{i=1}^m f(X_i^\nu(n)) = \frac{\alpha\varepsilon}{m2^p} \sum_{\nu=1}^{2^p} m f(X_i^\nu(n)) = \frac{\alpha\varepsilon}{2^p} \sum_{\nu=1}^{2^p} f(X_i^\nu(n))$$

Introduciendo este resultado en la expresión (6.4), y simplificando, resulta

$$X_i^\nu(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha) f(X_i^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2^p} \sum_{\nu=1}^{2^p} f(X_i^\nu(n)) \quad (6.5)$$

y como $X_i^\nu(n) = x_{2\nu-1, 2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2\nu-1} + O(\varepsilon^2)$ se obtiene

$$X_i^\nu(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha) f(x_{2\nu-1, 2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2\nu-1} + O(\varepsilon^2)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2^p} \sum_{\nu=1}^{2^p} f(x_{2\nu-1, 2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2\nu-1} + O(\varepsilon^2))$$

donde se observa que la evolución no depende del índice "i", es decir, todos los osciladores del mismo subgrupo tienen la misma evolución. Puesto que el sistema (6.5) es idéntico al resuelto en (4.13), queda confirmada la existencia de solución para el sistema (6.5). Quedan así determinados los valores de A_k por

$$A_k = \frac{\alpha}{-1 + \left(f^{2^{p+1}}(x_{1, 2^{p+1}}^*) \right)} \left[\sum_{n=1}^{2^{p+1}-1} \left(\left(-x_{k+n, 2^{p+1}}^* + \frac{1}{2^p} S_{k+n} \right) \cdot \prod_{l=n}^{2^{p+1}-1} f' \left(x_{k+l, 2^{p+1}}^* \right) \right) - x_{k, 2^{p+1}}^* + \frac{1}{2^p} S_k \right]$$

$$\text{siendo } S_j = \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{2^p} x_{2(\nu-1)+2, 2^{p+1}}^* & j = \dot{2} \\ \sum_{\nu=1}^{2^p} x_{2(\nu-1)+1, 2^{p+1}}^* & j = \dot{2} + 1 \end{cases}$$

Por tanto se ha probado que si la función f^{2^p} sufre una duplicación de periodo entonces los cluster del tipo I también muestran una duplicación de periodo de la onda precedente. ■

Vista la bifurcación de duplicación de periodo estamos en condiciones de buscar la CDP.

Teorema 3 . Cascada de duplicación de periodo de ondas viajeras en cluster tipo I.

Sea $f(x; r) : I \rightarrow I$, una función de clase C^2 dependiente de un parámetro, en función del cual la órbita de periodo 2^p del sistema $x_{n+1} = f(x_n)$ sufre una CDP. Sea $\{x_{i, 2^{p+q}}^*\}_{i=1}^{2^{p+q}}$ la órbita de periodo 2^{p+q} de la cascada con $q \in \mathbb{N}$.

El CML dado por

$$X_i^\nu(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{m2^p} \sum_{\nu=1}^{2^p} \sum_{i=1}^m f(X_i^\nu(n)) \quad (6.6)$$

$$\nu = 1, \dots, 2^p \quad i = 1, \dots, m \quad \varepsilon \ll 1$$

con condiciones iniciales

$$\begin{cases} X_i^\nu(n) = x_{2^q(\nu-1)+1, 2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(\nu-1)+1} + O(\varepsilon^2) \\ f^{2^{p+q}}(x_{i, 2^{p+q}}^*) = x_{i, 2^{p+q}}^* \\ A_k = \frac{\alpha}{-1 + (f^{2^{p+q}}(x_{1, 2^{p+q}}^*))} \left[\sum_{n=1}^{2^{p+q}-1} \left(-x_{k+n, 2^{p+q}}^* + \frac{1}{2^p} S_{k+n} \right) \cdot \right. \\ \left. \prod_{l=n}^{2^{p+q}-1} f' \left(x_{k+l, 2^{p+q}}^* \right) - x_{k, 2^{p+q}}^* + \frac{1}{2^p} S_k \right] \\ S_j = \sum_{\nu=1}^{2^p} x_{2^q(\nu-1)+l, 2^{p+q}}^* \quad j = \dot{2}^q + l \quad l = 1, \dots, 2^q \\ \nu = 1, \dots, 2^p \quad i = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, 2^{p+q} \end{cases}$$

y $\left(-1 + \left(f^{2^{p+q}}(x_{1,2^{p+q}}^*)\right)'\right)$ es $O(1)$, presenta 2^p -cluster los cuales evolucionan describiendo una onda periódica de periodo 2^{p+q} dada por $X_i^\nu(n+2^q) = X_i^{\nu+1}(n)$ con $X_i^\nu(n+2^{p+q}) = X_i^\nu(n)$

Demostración

Para que los cluster evolucionen describiendo una onda de periodo 2^{p+q} se deberá cumplir que los $m2^p$ -osciladores evolucionen de la forma

$$\begin{cases} X_i^\nu(n+j) = x_{2^q(\nu-1)+j,2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(\nu-1)+j} + O(\varepsilon^2) \\ x_{k,2^{p+q}}^* = x_{k+2^{p+q},2^{p+q}}^* & A_k = A_{k+2^{p+q}} \\ \nu = 1, \dots, 2^p & i = 1, \dots, m & k = 1, \dots, 2^{p+q} & j \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

ya que entonces $X_i^\nu(n+2^{p+q}) = X_i^\nu(n)$ determinándose por tanto una órbita de periodo 2^{p+q} .

Para ello es necesario que el sistema, que nos determina la evolución de los osciladores, sea compatible, a $O(\varepsilon)$, hecho que nos permitirá obtener los valores de A_k , $k = 1 \dots 2^{p+q}$.

Con las condiciones iniciales dadas en el estado inicial del CML todos los osciladores de un mismo subgrupo toman el mismo valor y por tanto se tiene que

$$\frac{\alpha\varepsilon}{m2^p} \sum_{\nu=1}^{2^p} \sum_{i=1}^m f(X_i^\nu(n)) = \frac{\alpha\varepsilon}{m2^p} \sum_{\nu=1}^{2^p} m f(X_i^\nu(n))$$

entonces sustituyendo en la expresión del CML (6.6), y simplificando, se obtiene:

$$X_i^\nu(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2^p} \sum_{\nu=1}^{2^p} f(X_i^\nu(n)) \quad (6.7)$$

es decir,

$$\begin{aligned} X_i^\nu(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(x_{2^q(\nu-1)+1,2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(\nu-1)+1} + O(\varepsilon^2)) + \\ &+ \frac{\alpha\varepsilon}{2^p} \sum_{\nu=1}^{2^p} f(x_{2^q(\nu-1)+1,2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(\nu-1)+1} + O(\varepsilon^2)) \end{aligned}$$

Nuevamente se cumple que la evolución no depende del índice "i", es decir, todos los osciladores del mismo subgrupo tienen la misma evolución.

Procediéndose de manera similar a como se ha procedido en el teorema 1, de este capítulo, se obtiene que la ecuación (6.7) que rige la evolución del subgrupo ν es idéntica a la ecuación (4.19)

ya resuelta. Por tanto se obtiene que

$$A_k = \frac{\alpha}{-1 + (f^{2^{p+q}}(x_1^*))} \left[\sum_{n=1}^{2^{p+q}-1} \left(-x_{k+n, 2^{p+q}}^* + \frac{1}{2^p} S_{k+n} \right) \cdot \prod_{l=n}^{2^{p+q}-1} f' \left(x_{k+l, 2^{p+q}}^* \right) - x_{k, 2^{p+q}}^* + \frac{1}{2^p} S_k \right]$$

siendo $S_j = \sum_{\nu=1}^{2^p} x_{2^q(\nu-1)+l, 2^{p+q}}^*$ $j = 2^q + l$ $l = 1, \dots, 2^q$

Así que se concluye que conforme la órbita de periodo 2^p de f duplica a una órbita de periodo 2^{p+q} , se produce la duplicación de la onda para los cluster del tipo I. ■

Los anteriores resultados han sido obtenidos en los cluster de tipo I considerando el CML con acoplamiento medio. Esto nos lleva a preguntarnos si es posible que todos estos resultados encontrados en dichos cluster también se puedan dar en el caso que se considere el CML con acoplamiento a primeros vecinos. La respuesta es negativa tal y como a continuación se muestra.

6.1.2. Onda viajera en cluster tipo I con acoplamiento a primeros vecinos

6.1.2.1. Teorema de no existencia.

Teorema 4

Sea $f(x; r) : I \rightarrow I$, una función de clase C^2 dependiente de un parámetro, y $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*\}$ una órbita de período p de f tal que $1 - f^{p'}(x_i^*)$ es $O(1)$ $i = 1, \dots, p$

Sea el CML

$$\begin{aligned} X_1^\nu(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_1^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (f(X_m^{\nu-1}(n)) + f(X_2^\nu(n))) \\ X_i^\nu(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (f(X_{i-1}^\nu(n)) + f(X_{i+1}^\nu(n))) \quad i = 2, \dots, m-1 \\ X_m^\nu(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_m^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (f(X_{m-1}^\nu(n)) + f(X_1^{\nu+1}(n))) \\ \nu &= 1, \dots, p \quad \varepsilon \ll 1 \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales

$$X_i^\nu(n) = x_\nu^* + \varepsilon A_\nu + O(\varepsilon^2)$$

con

$$\left\{ \begin{array}{l} f^p(x_\nu^*) = x_\nu^* \\ i = 1, \dots, m \quad \nu = 1, \dots, p \end{array} \right.$$

y condiciones de contorno periódicas, entonces el CML $\{X_i^\nu(n)\}_{\nu=1, \dots, p}$ no puede describir una onda periódica de periodo p del tipo $X_i^\nu(n+1) = X_i^{\nu+1}(n)$.

Demostración

Con las condiciones iniciales

$$X_i^\nu(n) = x_\nu^* + \varepsilon A_\nu + O(\varepsilon^2)$$

para que el CML describiera una onda periódica a $O(\varepsilon)$, se tendría que cumplir

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i^\nu(n) = x_\nu^* + \varepsilon A_\nu \\ X_i^\nu(n+1) = x_{\nu+1}^* + \varepsilon A_{\nu+1} \\ \vdots \\ X_i^\nu(n+p-1) = x_{\nu+p-1}^* + \varepsilon A_{\nu+p-1} = x_{\nu-1}^* + \varepsilon A_{\nu-1} \\ X_i^\nu(n+p) = x_\nu^* + \varepsilon A_\nu \end{array} \right. \quad i = 1, \dots, m, \quad \nu = 1, \dots, p$$

Para un valor de ν se tendría distintas ecuaciones de evolución según los valores de i .

Para $i = 1$ tendríamos

$$X_1^\nu(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_1^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (f(X_m^{\nu-1}(n)) + f(X_2^\nu(n)))$$

por tanto

$$\begin{aligned} x_{\nu+1}^* + \varepsilon A_{\nu+1} + O(\varepsilon^2) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(x_\nu^* + \varepsilon A_\nu + O(\varepsilon^2)) + \\ &+ \frac{\alpha\varepsilon}{2} (f(x_{\nu-1}^* + \varepsilon A_{\nu-1} + O(\varepsilon^2)) + f(x_\nu^* + \varepsilon A_\nu + O(\varepsilon^2))) \end{aligned}$$

desarrollando y agrupando a orden ε se obtendría

$$x_{\nu+1}^* + \varepsilon A_{\nu+1} = x_{\nu+1}^* + f'(x_\nu^*)\varepsilon A_\nu - \varepsilon\alpha x_{\nu+1}^* + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (x_\nu^* + x_{\nu+1}^*) \quad (6.8)$$

Para los valores de $i = 2, \dots, m-1$ se tiene

$$X_i^\nu(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (f(X_{i-1}^\nu(n)) + f(X_{i+1}^\nu(n)))$$

por tanto

$$\begin{aligned} x_{\nu+1}^* + \varepsilon A_{\nu+1} + O(\varepsilon^2) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(x_\nu^* + \varepsilon A_\nu + O(\varepsilon^2)) + \\ &+ \frac{\alpha\varepsilon}{2} (f(x_\nu^* + \varepsilon A_{\nu-1} + O(\varepsilon^2)) + f(x_\nu^* + \varepsilon A_\nu + O(\varepsilon^2))) \end{aligned}$$

desarrollando y agrupando a orden ε se obtendría

$$x_{\nu+1}^* + \varepsilon A_{\nu+1} = x_{\nu+1}^* + f'(x_\nu^*)\varepsilon A_\nu - \varepsilon\alpha x_{\nu+1}^* + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (x_\nu^* + x_\nu^*) \quad (6.9)$$

Fijándonos en las ecuaciones 6.8 y 6.9 ya se muestra la incompatibilidad del sistema resultante.

Simplificando en la ecuación 6.8 se obtendría

$$A_{\nu+1} - f'(x_\nu^*)A_\nu = -\alpha x_{\nu+1}^* + \frac{\alpha}{2} (x_\nu^* + x_\nu^*)$$

y realizando la misma operación en la ecuación 6.9 se obtendría

$$A_{\nu+1} - f'(x_\nu^*)A_\nu = 0$$

Estas dos ecuaciones tienen los mismos coeficientes pero sus términos independientes son distintos ya que $x_{\nu+1}^* \neq x_\nu^*$, este hecho nos indica que el sistema planteado no tiene solución, es decir no

puede existir una onda de este tipo en dichos cluster. ■

Los procesos de difusión se modelan con CML de interacción a primeros vecinos, lo que este teorema prueba es que tales sistemas no van a mostrar ondas de periodo p para cluster de tipo I.

Obsérvese que no necesitaremos fijarnos en el condiciones iniciales establecidas en el teorema, dado

6.2. Onda viajera en cluster de tipo II.

Hay una gran diversidad de condiciones iniciales para los cluster. Anteriormente hemos considerado una concreta, donde los m -osciladores de cada cluster tomaban inicialmente el mismo valor. En dicho caso, se ha conseguido demostrar la existencia de la onda viajera de los cluster, así como la CDP de la misma. Ahora vamos a considerar otra situación inicial donde el patrón consiste en que todos los ν -subgrupos de osciladores son idénticos en el instante n , aunque cada oscilador del subgrupo tenga un valor distinto, y eso nos proporciona p cluster.

6.2.1. Onda viajera en cluster tipo II con acoplamiento medio.

6.2.1.1. Teorema 5. Onda viajera.

Sea $f(x; r) : I \rightarrow I$, una función de clase C^2 dependiente de un parámetro, y $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*\}$ una órbita de período p de f .

Sea el CML

$$\begin{aligned} X_i^\nu(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{mp} \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^p f(X_i^\nu(n)) \\ i &= 1, \dots, p \quad \nu = 1, \dots, m \quad \varepsilon \ll 1 \end{aligned} \tag{6.10}$$

con las condiciones iniciales

$$X_i^\nu(n) = x_i^* + \varepsilon A_i + O(\varepsilon^2)$$

con

$$\left\{ \begin{array}{l} f^p(x_i^*) = x_i^* \\ A_i = \frac{\alpha}{-1+(f^p(x_1^*))'} \left[\sum_{n=1}^{p-1} \left(\left(-x_{i+n}^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \right) \prod_{l=n}^{p-1} f'(x_{k+l}^*) \right) + \right. \\ \left. + \left(-x_i^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \right) \right] \\ i = 1, \dots, p \quad \nu = 1, \dots, m \end{array} \right.$$

y $(-1 + (f^p(x_1^*))')$ es $O(1)$, entonces el CML presenta p -cluster $\{X_i^\nu(n)\}_{\nu=1, \dots, p}$ los cuales evolucionan describiendo una onda periódica de periodo p dada por $X_i^\nu(n+1) = X_{i+1}^\nu(n)$ y $X_i^\nu(n+p) = X_i^\nu(n)$.

Demostración

Con las condiciones iniciales dadas el CML es un cluster del tipo II.

Para que estos osciladores describan una onda de periodo- p se debe cumplir que la evolución temporal de cada uno de los osciladores del CML, a $O(\varepsilon)$, sea de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i^\nu(n) = x_i^* + \varepsilon A_i \\ X_i^\nu(n+1) = x_{i+1}^* + \varepsilon A_{i+1} \\ \vdots \\ X_i^\nu(n+p-1) = x_{i+p-1}^* + \varepsilon A_{i+p-1} = x_{i-1}^* + \varepsilon A_{i-1} \\ X_i^\nu(n+p) = x_i^* + \varepsilon A_i \end{array} \right. \quad i = 1, \dots, p, \quad \nu = 1, \dots, m \quad (6.11)$$

En este caso la evolución es idéntica en todos los subgrupos ν , por tanto para cada subgrupo ν se tienen las mismas ecuaciones de evolución.

Para que el sistema (6.11) presente dicha evolución, es necesario que el sistema que se obtiene sea un sistema compatible determinado y de él se puedan deducir los valores de A_i . De esta manera

quedará la solución descrita de la forma

$$\begin{cases} X_i^\nu(n+j) = x_{i+j}^* + \varepsilon A_{i+j} + O(\varepsilon^2) \\ x_i^* = x_{i+p}^* \quad A_i = A_{i+p} \\ i = 1, \dots, p, \quad \nu = 1, \dots, m \quad j \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

como se demuestra a continuación.

Por hipótesis, el oscilador i -ésimo de cada subgrupo ν toma inicialmente el mismo valor

$$X_i^\nu(n) = x_i^* + \varepsilon A_i + O(\varepsilon^2) \quad \nu = 1, \dots, m$$

por lo que

$$\frac{\alpha\varepsilon}{mp} \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^p f(X_i^\nu(n)) = \frac{\alpha\varepsilon}{mp} \sum_{i=1}^p m f(X_i^\nu(n))$$

Introduciendo este resultado en la expresión del CML (6.10), y simplificando, resulta:

$$\begin{aligned} X_i^\nu(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha) f(X_i^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{p} \sum_{i=1}^p f(X_i^\nu(n)) \\ i &= 1, \dots, p \quad \nu = 1, \dots, m \quad \varepsilon \ll 1 \end{aligned} \tag{6.12}$$

entonces

$$X_i^\nu(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha) f(x_i^* + \varepsilon A_i + O(\varepsilon^2)) + \frac{\alpha\varepsilon}{p} \sum_{i=1}^p f(x_i^* + \varepsilon A_i + O(\varepsilon^2))$$

La evolución no depende del índice ν , es decir todos los subgrupos evolucionan idénticamente. Por lo tanto basta con observar la evolución de un subgrupo para conocer la evolución de los restantes subgrupos.

La ecuación (6.12) que rige la evolución del CML es idéntica a la ecuación (5.9) que describía la evolución de p -osciladores colocados inicialmente en $x_i^* + \varepsilon A_i + O(\varepsilon^2)$ siendo $f^p(x_i^*) = x_i^*$, donde se concluyó que existía solución del sistema planteado y los osciladores describían una onda de periodo p . Como consecuencia, queda probada la existencia de una onda de periodo p para cada uno de estos cluster del tipo II. ■

6.2.1.2. Cascada de duplicación de periodo de ondas viajeras en cluster tipo II.

Al igual que existe CDP para las ondas viajeras de los cluster de tipo I se puede probar su existencia para los cluster del tipo II. En esta sección se procederá a realizar dicho estudio.

Bifurcación de la onda viajera

Nuestro primer objetivo, demostrar la existencia de la bifurcación de duplicación de periodo en los cluster tipo II, queda plasmado en el siguiente teorema.

Teorema 6. Existencia de la bifurcación de duplicación de periodo en cluster tipo II.

Sea $f(x; r) : I \rightarrow I$, una función de clase C^2 dependiente de un parámetro, en función del cual la órbita de periodo 2^p $p \in \mathbb{N}$ del sistema $x_{n+1} = f(x_n)$ sufre una bifurcación de duplicación de periodo.

El CML dado por

$$X_i^\nu(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{m2^p} \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^{2^p} f(X_i^\nu(n)) \quad (6.13)$$

$$i = 1, \dots, 2^p \quad \varepsilon \ll 1 \quad \nu = 1, \dots, m$$

con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} X_i^\nu(n) &= x_{2i-1, 2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2i-1} + O(\varepsilon^2) \\ \left\{ \begin{array}{l} f^{2^{p+1}}(x_{2i-1, 2^{p+1}}^*) = x_{2i-1, 2^{p+1}}^* \\ A_k = \frac{\alpha}{-1 + \left(f^{2^{p+1}}(x_{1, 2^{p+1}}^*)\right)} \left[\sum_{n=1}^{2^{p+1}-1} \left(\left(-x_{k+n, 2^{p+1}}^* + \frac{1}{2^p} S_{k+n} \right) \right. \right. \\ \left. \left. \prod_{l=n}^{2^{p+1}-1} f' \left(x_{k+l, 2^{p+1}}^* \right) \right) - x_{k, 2^{p+1}}^* + \frac{1}{2^p} S_k \right] \\ S_j = \begin{cases} \sum_{i=1}^{2^p} x_{2(i-1)+2, 2^{p+1}}^* & j = \dot{2} \\ \sum_{i=1}^{2^p} x_{2(i-1)+1, 2^{p+1}}^* & j = \dot{2} + 1 \end{cases} \\ i = 1, \dots, 2^p \quad \nu = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, 2^{p+1} \end{array} \right. \end{aligned}$$

y $-1 + f^{2^{p+1}}(x^*)$ es $O(1)$, presenta 2^p -cluster $\{X_i^\nu(n)\}_{i=1, \dots, 2^p}$ los cuáles evolucionan describiendo una onda periódica de periodo 2^{p+1} dada por $X_i^\nu(n+2) = X_{i+1}^\nu(n)$ y $X_i^\nu(n+2^{p+1}) = X_i^\nu(n)$.

Demostración

Para que los cluster evolucionen describiendo una onda de periodo 2^{p+1} , se deberá cumplir que la evolución temporal de cada uno de los $m2^p$ -osciladores sea de la forma:

$$X_i^\nu(n+j) = x_{2i-1+j, 2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2i-1+j} + O(\varepsilon^2) \quad j = 1, \dots, 2^{p+1}$$

$$\begin{cases} X_i^\nu(n+j) = x_{2i-1+j, 2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2i-1+j} + O(\varepsilon^2) \\ x_{k, 2^{p+1}}^* = x_{k+2^{p+1}, 2^{p+1}}^* & A_k = A_{k+2^{p+1}} \\ i = 1, \dots, 2^p & \nu = 1, \dots, m & k = 1, \dots, 2^{p+1} & j \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Para ello es necesario probar que los sistemas con 2^{p+1} -ecuaciones que determinan la evolución de los osciladores sean compatibles determinados, y de ellos se puedan obtener los valores de A_k $k = 1, \dots, 2^{p+1}$. Por hipótesis del teorema, los ν subgrupos son idénticos en el instante inicial, por lo que

$$\frac{\alpha\varepsilon}{m2^p} \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^{2^p} f(X_i^\nu(n)) = \frac{\alpha\varepsilon m}{m2^p} \sum_{i=1}^{2^p} f(X_i^\nu(n))$$

Introduciendo este resultado en la expresión del CML (6.13) resulta:

$$X_i^\nu(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2^p} \sum_{i=1}^{2^p} f(X_i^\nu(n)) \quad (6.14)$$

es decir,

$$X_i^\nu(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(x_{2i-1, 2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2i-1} + O(\varepsilon^2)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2^p} \sum_{i=1}^{2^p} f(x_{2i-1, 2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2i-1} + O(\varepsilon^2))$$

Donde se observa que la evolución no depende del índice ν , y por lo tanto basta con observar la evolución de un subgrupo para conocer la evolución de los restantes subgrupos. La ecuación de evolución, (6.14) es idéntica a la ecuación (4.13). En dicho caso ya se demostró la existencia de solución del sistema, lo que implica la existencia de una onda de período 2^{p+1} para los cluster de

tipo II.

En consecuencia, se ha probado que si la función f^{2^p} sufre una duplicación de periodo entonces los clusters del tipo II también muestran una duplicación de periodo de la onda precedente. ■

Vista la bifurcación de duplicación de periodo para los cluster de tipo II estamos en condiciones de buscar la CDP para dichos cluster, cuestión que se aborda en el siguiente teorema.

Teorema 7. Cascada de duplicación de periodo de ondas viajeras en cluster tipo II.

Sea $f(x; r) : I \rightarrow I$, una función de clase C^2 dependiente de un parámetro, en función del cual la órbita de periodo 2^p $p \in \mathbb{N}$ del sistema $x_{n+1} = f(x_n)$ sufre una CDP. Sea $\{x_{i,2^{p+q}}^*\}_{i=1}^{2^{p+q}}$ la órbita de periodo 2^{p+q} de la cascada con $q \in \mathbb{N}$.

El CML dado por

$$X_i^\nu(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{m2^p} \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^{2^p} f(X_j^\nu(n)) \quad (6.15)$$

$$\nu = 1, \dots, m \quad i = 1, \dots, 2^p \quad \varepsilon \ll 1$$

con condiciones iniciales

$$\begin{cases} X_i^\nu(n) = x_{2^q(i-1)+1,2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)+1} + O(\varepsilon^2) \\ f(x_{i,2^{p+q}}^*) = x_{i,2^{p+q}}^* \\ A_k = \frac{\alpha}{-1 + \left(f^{2^{p+q}}(x_{1,2^{p+q}}^*)\right)} \sum_{n=1}^{2^{p+q}-1} \left[\left(-x_{k+n,2^{p+q}}^* + \frac{1}{2^p} S_{k+n}\right) \cdot \right. \\ \left. \prod_{l=n}^{2^{p+q}-1} f' \left(x_{k+l,2^{p+q}}^*\right) + \left(-x_{k,2^{p+q}}^* + \frac{1}{2^p} S_k\right) \right] \\ S_j = \sum_{i=1}^{2^p} x_{2^q(i-1)+l,2^{p+q}}^* \quad j = 2^q + l \quad l = 1, \dots, 2^q \\ i = 1, \dots, 2^p \quad \nu = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, 2^{p+q} \end{cases}$$

y $\left(-1 + \left(f^{2^{p+q}}(x_{1,2^{p+q}}^*)\right)'\right)$ es $O(1)$, presenta 2^p -cluster los cuales evolucionan describiendo una onda periódica de periodo 2^{p+q} dada por $X_i^\nu(n + 2^q) = X_{i+1}^\nu(n)$ y $X_i^\nu(n + 2^{p+q}) = X_i^\nu(n)$.

Demostración

Para que los cluster evolucionen describiendo una onda de periodo 2^{p+q} se deberá cumplir que los $m2^p$ -osciladores evolucionen de la forma

$$\begin{cases} X_i^\nu(n + j) = x_{2^q(i-1)+j,2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)+j} + O(\varepsilon^2) \\ x_{k,2^{p+q}}^* = x_{k+2^{p+q},2^{p+q}}^* & A_k = A_{k+2^{p+q}} \\ i = 1, \dots, 2^p & \nu = 1, \dots, m & k = 1, \dots, 2^{p+q} & j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Para ello es necesario que el sistema que nos determina la evolución de los osciladores sea compatible determinado a $O(\varepsilon)$, hecho que nos permitirá obtener los valores de A_k , $k = 1 \dots 2^{p+q}$.

Con las condiciones iniciales dadas en el CML todos subgrupos son idénticos en el instante inicial y por tanto se cumple que

$$\frac{\alpha\varepsilon}{m2^p} \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^{2^p} f(X_i^\nu(n)) = \frac{\alpha\varepsilon m}{m2^p} \sum_{i=1}^{2^p} f(X_i^\nu(n))$$

Introduciendo este resultado en la expresión del CML (6.15), y simplificando, se obtiene:

$$X_i^\nu(n + 1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2^p} \sum_{i=1}^{2^p} f(X_i^\nu(n)) \quad (6.16)$$

es decir,

$$\begin{aligned} X_i^\nu(n + 1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(x_{2^q(i-1)+1,2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)+1} + O(\varepsilon^2)) + \\ &+ \frac{\alpha\varepsilon}{2^p} \sum_{i=1}^{2^p} f(x_{2^q(i-1)+1,2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)+1} + O(\varepsilon^2)) \end{aligned}$$

La evolución no depende del índice " ν " y por tanto la ecuación (6.16) que rige la evolución del CML, es idéntica a la ecuación (4.19). En dicho caso ya se demostró la existencia de la onda de período 2^{p+q} . Por tanto queda demostrada la CDP de la órbita para los cluster del tipo II. ■

Procederemos a continuación a realizar el estudio en los cluster tipo II cuando el acoplamiento

es a primeros vecinos.

6.2.2. Onda viajera en cluster tipo II con acoplamiento a primeros vecinos.

6.2.2.1. Teorema 8. Onda viajera.

Sea $f(x; r) : I \rightarrow I$, una función de clase C^2 dependiente de un parámetro, y $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*\}$ una órbita de período p de f .

Sea el CML

$$\begin{aligned} X_1^\nu(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_1^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (f(X_m^{\nu-1}(n)) + f(X_2^\nu(n))) \\ X_i^\nu(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (f(X_{i-1}^\nu(n)) + f(X_{i+1}^\nu(n))) \quad i = 2, \dots, m-1 \\ X_m^\nu(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_m^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (f(X_{m-1}^\nu(n)) + f(X_1^{\nu+1}(n))) \\ \nu &= 1, \dots, p \quad \varepsilon \ll 1 \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales

$$X_i^\nu(n) = x_i^* + \varepsilon A_i + O(\varepsilon^2)$$

con

$$\left\{ \begin{array}{l} f^p(x_i^*) = x_i^* \\ A_i = \frac{\alpha}{1 - (f^p(x_1^*))'} \left[-x_i^* + \frac{1}{2} (x_{i-1}^* + x_{i+1}^*) + \sum_{n=1}^{p-1} (-x_{i+n}^* + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (x_{i+n-1}^* + x_{i+n+1}^*)) \prod_{l=n}^{p-1} f'(x_{i+l}^*) \right] \\ i = 1, \dots, p \quad \nu = 1, \dots, m \end{array} \right.$$

y $(-1 + (f^p(x_1^*))')$ es $O(1)$, entonces el CML presenta p -cluster $\{X_i^\nu(n)\}_{\nu=1, \dots, p}$ los cuales evolucionan describiendo una onda periódica de periodo p dada por $X_i^\nu(n+1) = X_{i+1}^\nu(n)$ y $X_i^\nu(n+p) = X_i^\nu(n)$.

Demostración

El CML debido a las condiciones iniciales determinadas es un cluster del tipo II.

Para que los osciladores describan una onda de periodo- p se debe cumplir la siguiente evolución temporal en cada uno de los osciladores del CML a $O(\varepsilon)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i^\nu(n) = x_i^* + \varepsilon A_i \\ X_i^\nu(n+1) = x_{i+1}^* + \varepsilon A_{i+1} \\ \vdots \\ X_i^\nu(n+p-1) = x_{i+p-1}^* + \varepsilon A_{i+p-1} = x_{i-1}^* + \varepsilon A_{i-1} \\ X_i^\nu(n+p) = x_i^* + \varepsilon A_i \end{array} \right. \quad i = 1, \dots, p, \quad \nu = 1, \dots, m \quad (6.17)$$

Dado que cada p elementos consecutivos forman un mismo grupo, basta estudiar el comportamiento de un subgrupo para que quede determinado el de todos los subgrupos por la periodicidad. Como el estudio de p elementos a primeros vecinos, que constituyen un subgrupo ha sido resuelto en el teorema (4.3.1) y el sistema (6.17) planteado aquí, es el mismo entonces la solución queda descrita de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i^\nu(n+j) = x_{i+j}^* + \varepsilon A_{i+j} + O(\varepsilon^2) \\ x_i^* = x_{i+p}^* \quad A_i = A_{i+p} \\ i = 1, \dots, p, \quad \nu = 1, \dots, m \quad j \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

Como consecuencia, queda probada la existencia de una onda de periodo p para cada uno de estos cluster del tipo II. ■

Todos los cluster con mp elementos con p y m números naturales fijos, constituyen una clase de equivalencia. Hay tantas clases de equivalencia como valores de p , entonces el representante de la clase es el formado con p osciladores que toman inicialmente los valores consecutivos de los puntos de la órbita. Por lo tanto, aunque físicamente el sistema formado por mp elementos es distinto del sistema formado por p , desde el punto de vista matemático son el mismo ya que tienen el mismo representante de la clase de equivalencia.

6.2.2.2. Cascada de duplicación de periodo de ondas viajeras en cluster tipo II con acoplamiento a primeros vecinos.

En esta sección se procederá a realizar el estudio en este tipo de cluster cuando el acoplamiento es a primeros vecinos. Comprobaremos la existencia de la bifurcación de la onda viajera como la existencia de la CDP.

Bifurcación de la onda viajera

En el siguiente teorema pasaremos a demostrar la existencia de la bifurcación de duplicación de periodo.

Teorema 9. Existencia de la bifurcación de duplicación de periodo en cluster tipo II con acoplamiento a primeros vecinos.

Sea $f(x; r) : I \rightarrow I$, una función de clase C^2 dependiente de un parámetro, en función del cual la órbita de periodo 2^p $p \in \mathbb{N}$ del sistema $x_{n+1} = f(x_n)$ sufre una bifurcación de duplicación de periodo.

El CML dado por

$$\begin{aligned} X_1^\nu(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_1^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (f(X_m^{\nu-1}(n)) + f(X_2^\nu(n))) \\ X_i^\nu(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (f(X_{i-1}^\nu(n)) + f(X_{i+1}^\nu(n))) \quad i = 2, \dots, m-1 \\ X_m^\nu(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_m^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (f(X_{m-1}^\nu(n)) + f(X_1^{\nu+1}(n))) \\ \nu &= 1, \dots, p \quad \varepsilon \ll 1 \end{aligned}$$

con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} X_i^\nu(n) &= x_{2i-1, 2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2i-1} + O(\varepsilon^2) \\ \left\{ \begin{array}{l} f^{2^{p+1}}(x_{2i-1, 2^{p+1}}^*) = x_{2i-1, 2^{p+1}}^* \\ A_k = \frac{\alpha}{1 - (f^{2^{p+1}}(x_{1, 2^{p+1}}^*))'} \left[\sum_{n=1}^{2^{p+1}-1} \left(-x_{k+n, 2^{p+1}}^* + \frac{1}{2} (x_{k+n+2, 2^{p+1}}^* + x_{k+n-2, 2^{p+1}}^*) \right) \right. \\ \left. \prod_{l=n}^{2^{p+1}-1} f'(x_{k+l, 2^{p+1}}^*) + \left(-x_{k, 2^{p+1}}^* + \frac{1}{2} (x_{k+2, 2^{p+1}}^* + x_{k+n, 2^{p+1}}^*) \right) \right] \\ i = 1, \dots, 2^p \quad \nu = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, 2^{p+1} \end{array} \right. \end{aligned}$$

y $-1 + f^{2^{p+1}}(x_{1,2^{p+1}}^*)$ es $O(1)$, presenta 2^p -cluster $\{X_i^\nu(n)\}_{i=1,\dots,2^p}$ los cuáles evolucionan describiendo una onda periódica de periodo 2^{p+1} dada por $X_i^\nu(n+2) = X_{i+1}^\nu(n)$ y $X_i^\nu(n+2^{p+1}) = X_i^\nu(n)$.

Demostración

Para que los cluster evolucionen describiendo una onda de periodo 2^{p+1} , se deberá cumplir que la evolución temporal de cada uno de los $m2^p$ -osciladores sea de la forma:

$$\begin{aligned} X_i^\nu(n+j) &= x_{2i-1+j,2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2i-1+j} + O(\varepsilon^2) \quad j = 1, \dots, 2^{p+1} \\ \left\{ \begin{array}{l} X_i^\nu(n+j) = x_{2i-1+j,2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2i-1+j} + O(\varepsilon^2) \\ x_{k,2^{p+1}}^* = x_{k+2^{p+1},2^{p+1}}^* \quad A_k = A_{k+2^{p+1}} \\ i = 1, \dots, 2^p \quad \nu = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, 2^{p+1} \quad j \in \mathbb{N}^* \end{array} \right. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Para ello es necesario probar que los sistemas (6.18) con 2^{p+1} -ecuaciones que determinan la evolución de los osciladores sean compatibles determinados, y de ellos se puedan obtener los valores de A_k $k = 1, \dots, 2^{p+1}$.

La evolución no depende del índice ν , y por lo tanto basta con observar la evolución de un subgrupo para conocer la evolución de los restantes subgrupos. La ecuación de evolución (6.18) es idéntica, a la ecuación estudiada en el teorema 6 del capítulo 4. En dicho caso ya se demostró la existencia de solución del sistema, lo que implica la existencia de una onda de período 2^{p+1} para los cluster de tipo II.

En consecuencia, se ha probado que si la función f^{2^p} sufre una duplicación de periodo entonces los clusters del tipo II también muestran una duplicación de periodo de la onda precedente. ■

Vista la bifurcación de duplicación de periodo para los cluster de tipo II estamos en condiciones de buscar la CDP para dichos cluster, cuestión que se aborda en el siguiente teorema.

Teorema 10. Cascada de duplicación de periodo de ondas viajeras en cluster tipo II.

Sea $f(x; r) : I \rightarrow I$, una función de clase C^2 dependiente de un parámetro, en función del cual la órbita de periodo 2^p $p \in \mathbb{N}$ del sistema $x_{n+1} = f(x_n)$ sufre una CDP. Sea $\left\{x_{i,2^{p+q}}^*\right\}_{i=1}^{2^{p+q}}$ la órbita de periodo 2^{p+q} de la cascada con $q \in \mathbb{N}$.

El CML dado por

$$\begin{aligned} X_1^\nu(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_1^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (f(X_m^{\nu-1}(n)) + f(X_2^\nu(n))) \\ X_i^\nu(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (f(X_{i-1}^\nu(n)) + f(X_{i+1}^\nu(n))) \quad i = 2, \dots, m-1 \\ X_m^\nu(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_m^\nu(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (f(X_{m-1}^\nu(n)) + f(X_1^{\nu+1}(n))) \\ \nu &= 1, \dots, p \quad \varepsilon \ll 1 \end{aligned}$$

con condiciones iniciales

$$X_i^\nu(n) = x_{2^q(i-1)+1,2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)+1} + O(\varepsilon^2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} f(x_{i,2^{p+q}}^*) &= x_{i,2^{p+q}}^* \\ A_k &= \frac{\alpha}{1 - (f^{2^{p+q}}(x_{1,2^{p+q}}^*))'} \left[-x_{k,2^{p+q}}^* + \frac{1}{2} \left(x_{k+2^q,2^{p+q}}^* + x_{k-2^q,2^{p+q}}^* \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{2^{p+q}-1} \left(-x_{k+n,2^{p+q}}^* + \frac{1}{2} \left(x_{k+n+2^q,2^{p+q}}^* + x_{k+n-2^q,2^{p+q}}^* \right) \prod_{l=n}^{2^{p+q}-1} f'(x_{k+l,2^{p+q}}^*) \right) \right] \\ i &= 1, \dots, 2^p \quad \nu = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, 2^{p+q} \end{aligned} \right.$$

y $\left(-1 + \left(f^{2^{p+q}}(x_{1,2^{p+q}}^*)\right)'\right)$ es $O(1)$, presenta 2^p -cluster los cuales evolucionan describiendo una onda periódica de periodo 2^{p+q} dada por $X_i^\nu(n+2^q) = X_{i+1}^\nu(n)$ y $X_i^\nu(n+2^{p+q}) = X_i^\nu(n)$.

Demostración

Para que los cluster evolucionen describiendo una onda de periodo 2^{p+q} se deberá cumplir que los $m2^p$ -osciladores evolucionen de la forma

$$\left\{ \begin{aligned} X_i^\nu(n+j) &= x_{2^q(i-1)+j,2^{p+q}}^* + \varepsilon A_{2^q(i-1)+j} + O(\varepsilon^2) \\ x_{k,2^{p+q}}^* &= x_{k+2^{p+q},2^{p+q}}^* \quad A_k = A_{k+2^{p+q}} \\ i &= 1, \dots, 2^p \quad \nu = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, 2^{p+q} \quad j \in \mathbb{N}^* \end{aligned} \right. \quad (6.19)$$

Para ello es necesario que el sistema a $O(\varepsilon)$ (6.19) que nos determina la evolución de los os-

ciladores sea compatible determinado, hecho que nos permitirá obtener los valores de A_k , $k = 1 \dots 2^{p+q}$.

La evolución no depende del índice " ν " y por tanto la ecuación de evolución (6.19) que rige la evolución del CML es idéntica, a la ecuación estudiada en el teorema 7 del capítulo 4. En dicho caso ya se demostró la existencia de la onda de período 2^{p+q} . Por tanto queda demostrada la CDP de la onda para los cluster del tipo II. ■

Capítulo 7

ONDAS ASOCIADAS A LA CASCADA DE BIFURCACIONES SADDLE-NODE

En el capítulo tres se demostró la existencia de ondas p -periódicas y de sus CDP. Para encontrar la solución de las ondas p -periódicas era necesario que $1 - f^{p'}(x^*)$ fuera $O(1)$, es decir, que la derivada de f^p en x^* (punto de la órbita) no fuera muy próximo a uno, lo que representa el nacimiento de una órbita saddle-node p -periódica o que estamos cerca de ella.

Tenemos que resolver el problema pendiente de las ondas saddle-node (S-N) p -periódicas; esto lo haremos en la primera sección, en la segunda nos centraremos en la cascada de bifurcación S-N [66] que a diferencia de la CDP, todas sus bifurcaciones se producen con derivada $+1$, es decir, $(f^{p2^m})'(x^*) = 1$ lo que nos lleva a encontrarnos con el problema original.

7.1. Ondas saddle-node en un CML con acoplamiento medio

Las órbitas S-N p -periódicas son el origen de las ventanas p -periódicas de un sistema dinámico $X(n+1) = f(X(n); r)$, se componen de p -puntos S-N, x_i^* $i = 1, \dots, p$ y en cada uno de ellos $(f^p)'(x_i^*) = 1$. La variación del parámetro de control hace que la órbita S-N se separe en dos órbitas (la bifurcación), una tipo nodo y otra tipo saddle. Las órbitas se van separando más conforme el

parámetro varía. Originalmente $(f^p)'(x_i^*)$ es próximo a 1 en los puntos de la órbita nodo, pero $(f^p)'(x_i^*) < 1$; conforme va variando el parámetro la derivada disminuye hasta llegar a cero, momento en el que se produce el superciclo de periodo p en la ventana p -periódica. Nuevas variaciones del parámetro producen una disminución de $(f^p)'(x_i^*)$ (x_i^* , punto nodo) hasta que alcanza el valor -1 y se produce el primer elemento de la CDP.

El proceso descrito desde el origen de la bifurcación S-N hasta la duplicación de periodo es un proceso continuo, resultado de la variación continua del parámetro de control. Por continuidad, y aplicando la regla de la cadena, hay un punto S-N de la órbita p -periódica cuyo nodo tras la evolución coincide con en el punto crítico C de $f(x; r)$. Denotemos a este punto S-N más próximo a C en la órbita p -periódica por $x_{p,C}$. En particular, si consideramos la ecuación logística $X(n+1) = rX(n)(1 - X(n))$ se tiene que $d(C, x_{3,C}) = 0,02$ unidades (ver figura 1), considerando como unidad el intervalo $[0, 1]$ que se aplica en si mismo por $f(x, r) = rx(1 - x)$. Si consideramos la órbita S-N 4-periódica de última aparición se tiene que $d(C, x_{4,C}) = 6 \cdot 10^{-3}$. Cuanto más grande sea p menor es $d(C, x_{p,C})$. A consecuencia de ello, cuando se realiza el desarrollo de Taylor en el entorno de C tendremos $|x_{p,C} - C| < \varepsilon$ y esos términos serán despreciables en las expansiones de nuestros desarrollos. En conclusión, para todo ε existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que la órbita saddle-node p -periódica tiene uno de sus puntos a una distancia del punto C menor que ε , además toda órbita saddle-node periodo $q > p$ cumple la misma propiedad.

Teorema 1. Ondas saddle-node.

Sea $f : I \rightarrow I$, $f \in C^2$ una función unimodal dependiente de un parámetro, con punto crítico en C , y sea $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*\}$ una órbita de periodo p de f con $1 - f^p'(x_1^*) \leq O(\varepsilon)$. Si $|x_1^* - C| \leq \varepsilon$ entonces el CML dado por

$$\begin{aligned} X_i(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{p} \sum_{j=1}^p f(X_j(n)) \\ i &= 1, \dots, p \quad \varepsilon \ll 1 \end{aligned} \tag{7.1}$$

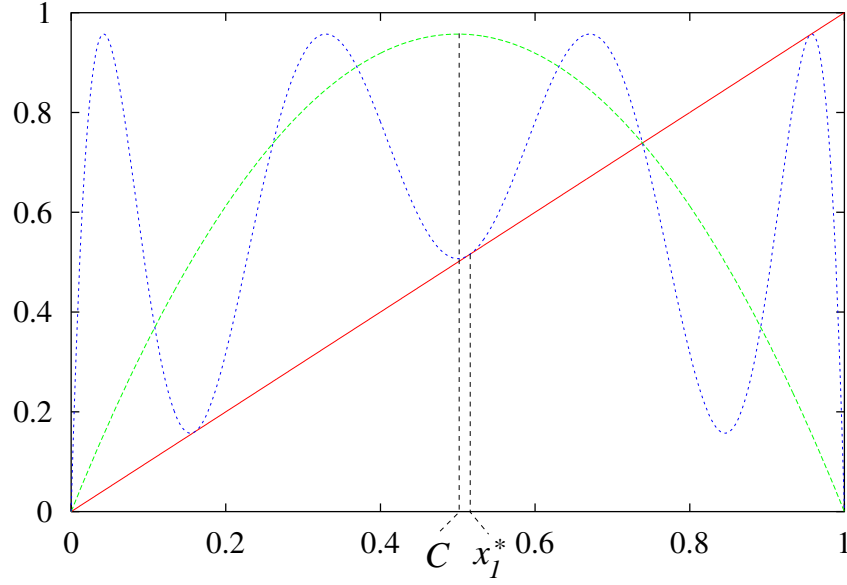


Figura 7.1: Órbita de periodo 3.

Primer elemento de la cascada de bifurcaciones S-N con periodo básico $q=3$.

presenta una solución periódica de periodo p , dada por

$$\begin{aligned} X_i(n+j) &= x_{i+j}^* + \varepsilon A_{i+j} + O(\varepsilon^2) \\ i &= 1, \dots, p \\ j &\in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

donde

$$A_{i+1} = \begin{cases} \alpha \left[-x_{i+1}^* + \frac{1}{p} \sum_{l=1}^p x_l^* + \sum_{n=2}^i \left((-x_n^* + \frac{1}{p} \sum_{l=1}^p x_l^*) \prod_{l=n}^i f'(x_l^*) \right) \right] & i \neq 1 \\ \alpha \left(-x_{i+1}^* + \frac{1}{p} \sum_{l=1}^p x_l^* \right) & i = 1 \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, p$$

con condiciones de periodicidad

$$\begin{aligned} A_{i+p} &= A_i \\ x_{i+p}^* &= x_i^* \end{aligned} \quad \forall i$$

Demostración

Para que exista la solución periódica dada por

$$\begin{aligned} X_i(n+j) &= x_{i+j}^* + \varepsilon A_{i+j} + O(\varepsilon^2) \\ i &= 1, \dots, p \end{aligned}$$

se tendrá que cumplir que el sistema a $O(\varepsilon)$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_i(n) &= & x_i^* + \varepsilon A_i \\ X_i(n+1) &= & x_{i+1}^* + \varepsilon A_{i+1} \\ && \vdots \\ X_i(n+p-1) &= & x_{i+p-1}^* + \varepsilon A_{i+p-1} = x_{i-1}^* + \varepsilon A_{i-1} \\ X_i(n+p) &= & x_i^* + \varepsilon A_i \end{array} \right. \quad i = 1, \dots, p$$

sea compatible determinado.

Dado que la evolución del CML viene dada por

$$X_i(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\varepsilon\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f(X_j(n))$$

sustituyendo en esta expresión $X_i(n) = x_i^* + \varepsilon A_i + O(\varepsilon^2)$ se obtiene

$$x_{i+1}^* + \varepsilon A_{i+1} + O(\varepsilon^2) = (1 - \varepsilon\alpha)f(x_i^* + \varepsilon A_i + O(\varepsilon^2)) + \frac{\varepsilon\alpha}{p} \sum_{j=1}^p f(x_j^* + \varepsilon A_j + O(\varepsilon^2)) \quad (7.2)$$

Desarrollando $f(x_i^* + \varepsilon A_i + O(\varepsilon^2))$ hasta $O(\varepsilon^2)$ se tendrá

$$f(x_i^* + \varepsilon A_i + O(\varepsilon^2)) = f(x_i^*) + \varepsilon A_i f'(x_i^*) + O(\varepsilon^2) \quad (7.3)$$

Ahora tenemos que distinguir dos casos:

$$\text{i) } |x_1^* - C| \leq \varepsilon$$

Podemos considerar, sin pérdida de generalidad que el punto de la órbita que está más cercano al punto C es el x_1^* , en caso de que fuera otro punto se procedería de manera similar. Dado que el punto x_1^* está a una distancia del centro C menor o igual que ε , haciendo un desarrollo de Taylor

de la función f' alrededor de C en (7.3), se obtiene

$$f'(x_1^*) = f'(C) + f''(C)(x_1^* - C) + O(\varepsilon^2) \quad (7.4)$$

sustituyendo (7.4) en (7.3) y expandiendo en potencias de ε resulta

$$f(x_1^* + \varepsilon A_1 + O(\varepsilon^2)) = f(x_1^*) + O(\varepsilon^2) = x_2^* + O(\varepsilon^2) \quad (7.5)$$

Introduciendo este resultado (7.5) en (7.2) se tiene

$$x_2^* + \varepsilon A_2 + O(\varepsilon^2) = x_2^* - \varepsilon \alpha x_2^* + \frac{\varepsilon \alpha}{p} \sum_{j=1}^p (x_{j+1}^*) + O(\varepsilon^2)$$

ii) $|x_i^* - C| > \varepsilon \quad i = 2, \dots, p$

En este caso la expansión en potencias de ε queda

$$f(x_i^* + \varepsilon A_i + O(\varepsilon^2)) = f(x_i^*) + \varepsilon A_i f'(x_i^*) + O(\varepsilon^2) \quad (7.6)$$

y sustituyendo (7.6) en la expresión (7.2) resulta

$$\begin{aligned} x_{i+1}^* + \varepsilon A_{i+1} + O(\varepsilon^2) &= (1 - \varepsilon \alpha)(x_{i+1}^* + \varepsilon A_i f'(x_i^*) + O(\varepsilon^2)) + \\ &+ \frac{\varepsilon \alpha}{p} \sum_{j=1}^p ((x_{j+1}^* + \varepsilon A_j f'(x_j^*)) + O(\varepsilon^2)) \end{aligned}$$

es decir,

$$x_{i+1}^* + \varepsilon A_{i+1} + O(\varepsilon^2) = x_{i+1}^* + \varepsilon A_i f'(x_i^*) - \varepsilon \alpha x_{i+1}^* + \frac{\varepsilon \alpha}{p} \sum_{j=1}^p (x_{j+1}^*) + O(\varepsilon^2)$$

Por lo tanto a orden ε , el sistema que debemos resolver será

$$\begin{cases} -A_i f'(x_i^*) + A_{i+1} = -\alpha x_{i+1}^* + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p x_{j+1}^* & i = 2, \dots, p \\ A_2 = -\alpha x_2^* + \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^p x_{j+1}^* & i = 1 \end{cases}$$

cuya expresión matricial es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -f'(x_2^*) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -f'(x_3^*) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -f'(x_p^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -x_2^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ -x_3^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ -x_4^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ \vdots \\ -x_1^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

Este es un sistema de p ecuaciones con p incógnitas cuya matriz de los coeficiente tiene como determinante $(-1)^{p+1}$, entonces el sistema resultante es compatible determinado. Además, la solución del sistema es distinta de la trivial para todo valor $\alpha \neq 0$, pues la columna de los términos independientes es no nula porque $x_1^* \neq x_2^* \neq \cdots \neq x_p^*$, es decir,

$$\begin{pmatrix} -x_2^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ -x_3^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ -x_4^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ \vdots \\ -x_1^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solución del sistema se obtiene de (7.7) invirtiendo directamente, y resulta:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -f'(x_2^*) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -f'(x_p^*) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -x_2^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ -x_3^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ \vdots \\ -x_1^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \end{pmatrix}$$

La inversión de la matriz lleva al resultado:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix} = \alpha MN \quad (7.8)$$

donde la matriz M es

$$M = \begin{pmatrix} f'(x_2^*) \cdots f'(x_p^*) & f'(x_3^*) \cdots f'(x_p^*) & f'(x_4^*) \cdots f'(x_p^*) & \cdots & f'(x_p^*) & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ f'(x_2) & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ f'(x_2^*) \cdots f'(x_{p-1}^*) & f'(x_3^*) \cdots f'(x_{p-1}^*) & f'(x_4^*) \cdots f'(x_{p-1}^*) & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

y

$$N = \begin{pmatrix} -x_2^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ -x_3^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ -x_4^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ \vdots \\ -x_1^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz M dada por (7.9) basta sustituir $f'(x_1^*) = 0$ en la matriz (4.1), del teorema 1 del capítulo 4, de la que es un caso particular.

La expresión matricial de la soluciones es

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} f'(x_2^*) \cdots f'(x_p^*) & f'(x_3^*) \cdots f'(x_p^*) & f'(x_4^*) \cdots f'(x_p^*) & \cdots & f'(x_p^*) & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ f'(x_2) & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ f'(x_2^*) \cdots f'(x_{p-1}^*) & f'(x_3^*) \cdots f'(x_{p-1}^*) & f'(x_4^*) \cdots f'(x_{p-1}^*) & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_2^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ -x_3^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ -x_4^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ \vdots \\ -x_1^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \end{pmatrix}$$

Se observa, que si ordenamos las soluciones de la forma, primero A_2 , luego A_3 , y así sucesivamente hasta llegar a A_p , y por último A_1 , ello conllevaría a trasladar la primer fila de la matriz M a la última posición. La expresión matricial de la soluciones sería,

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_p \\ A_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ f'(x_2) & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ f'(x_2^*)..f'(x_{p-1}^*) & f'(x_3^*)..f'(x_{p-1}^*) & f'(x_4^*)..f'(x_{p-1}^*) & \cdots & 1 & 0 \\ f'(x_2^*) \cdots f'(x_p^*) & f'(x_3^*)..f'(x_p^*) & f'(x_4^*)..f'(x_p^*) & \cdots & f'(x_p^*) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_2^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ -x_3^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ -x_4^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ \vdots \\ -x_1^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

Este cambio nos permite tener una matriz triangular inferior, que nos facilita la expresión de las soluciones.

Operando en (7.10) la solución se puede expresar de la forma

$$A_{i+1} = \begin{cases} \alpha \left[-x_{i+1}^* + \frac{1}{p} \sum_{l=1}^p x_l^* + \sum_{n=2}^i \left((-x_n^* + \frac{1}{p} \sum_{l=1}^p x_l^*) \prod_{l=n}^i f'(x_l^*) \right) \right] & i \neq 1 \\ \alpha \left(-x_{i+1}^* + \frac{1}{p} \sum_{l=1}^p x_l^* \right) & i = 1 \end{cases} \blacksquare$$

7.2. Ondas asociadas a la cascada de bifurcación Saddle-Node en un CML con acoplamiento medio.

El teorema anterior 7.1 nos ha permitido concluir la existencia de ondas de periodo p , asociadas a bifurcaciones saddle-node de f^p . En el caso estudiado, uno de los puntos de la órbita estaba muy próximo al punto crítico C (ver (7.1)). A continuación vamos a estudiar que sucede cuando sean q puntos de la órbita los que estén muy próximos al punto crítico C de f , cosa que sucederá en la CBS-N.

Una CBS-N [66] es una sucesión de bifurcaciones S-N en la que el número de puntos que presentan este tipo de bifurcaciones se duplica, por lo tanto, una CBS-N se compone de órbitas S-N con periodos $q, q \cdot 2, q \cdot 2^2, \dots, q \cdot 2^n, \dots$ $n \in \mathbb{Z}^+$; donde q recibe el nombre de periodo básico, y excepto para $q = 3$ no es único. Se pueden ver los primeros elementos de la CBS-N, con periodo básico $q = 3$, en las figuras 7.1, 7.2, 7.3 y 7.4.

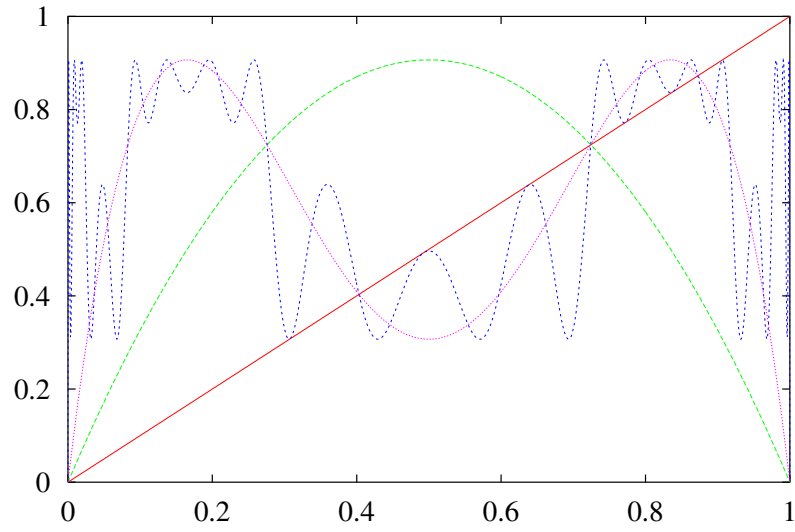


Figura 7.2: Órbita de periodo $3 \cdot 2$.
 Segundo elemento de la CBS-N con periodo básico $q = 3$.
 Se observa como la órbita de periodo 3, (ver figura 7.1) se reproduce en 2 extremos.

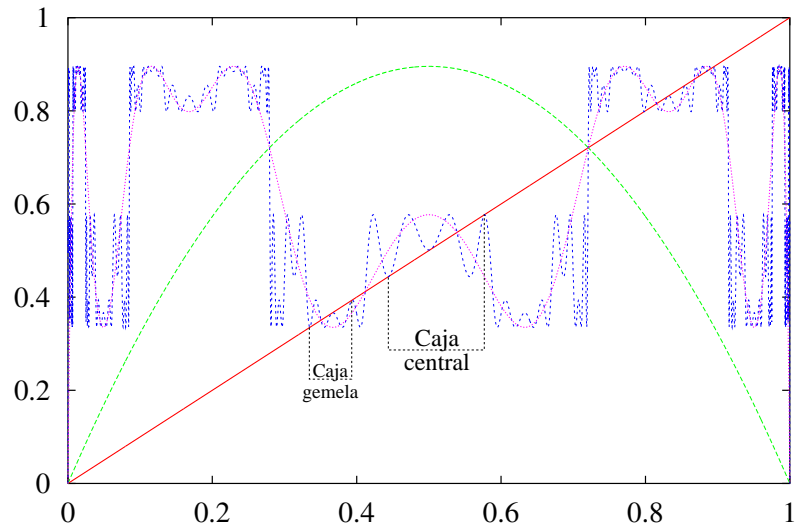


Figura 7.3: Órbita de periodo $3 \cdot 2^2$.
 Tercer elemento de la CBS-N con periodo básico $q = 3$.
 Se observa como la órbita de periodo 3, (ver figura 7.1) se reproduce en 2^2 extremos.

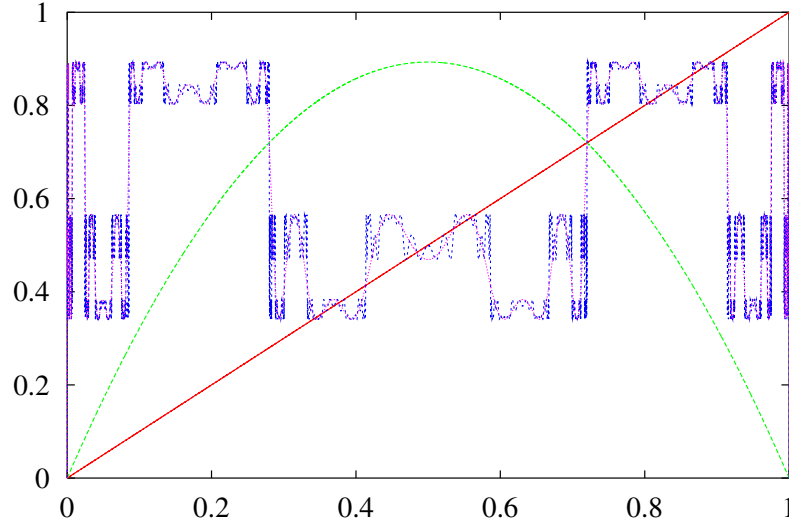


Figura 7.4: Órbita de periodo $3 \cdot 2^3$.

Cuarto elemento de la CBS-N con periodo básico $q = 3$.

Se observa como la órbita de periodo 3, (ver figura 7.1) se reproduce en 2^3 extremos.

En la figura 7.1 se observa una órbita S-N 3-periódica. En la figura 7.2 se observa una órbita S-N $3 \cdot 2$ -periódica, donde podemos comprobar como la órbita original 3-periódica está repetida en los extremos de f^2 más próximos a $y = x$. De forma similar en la figura 7.3 se ve una órbita S-N $3 \cdot 2^2$ -periódica, donde nuevamente se observa como la órbita S-N original está repetida 2^2 veces en los extremos de f^{2^2} más próxima a $y = x$. Igual discusión se puede hacer para la figura 7.4 donde se muestra una órbita S-N $3 \cdot 2^3$ -periódica.

Atendiendo a la descripción geométrica de la CBS-N, resulta que los $q \cdot 2^n$ puntos de una órbita S-N se dividen en 2^n conjuntos con q puntos cada uno. Los 2^n conjuntos son los extremos de f^{2^n} más próximos a $y=x$, y recibirán el nombre de cajas. Según se van recorriendo sucesivamente los puntos de la órbita $q \cdot 2^n$ se visita una caja diferente.

Las órbitas de la CBS-N están regidas por las mismas ecuaciones de Feigenbaum para la CDP

$$r_{q \cdot 2^{n+1}, SN} = \frac{1}{\delta} r_{q \cdot 2^n, SN} + \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) r_\infty$$

donde $r_{q \cdot 2^n, SN}$ indica el valor del parámetro para el que se produce la órbita S-N $q \cdot 2^n$ -periódica, δ es la constante de Feigenbaum y r_∞ es el punto de Myrberg-Feigenbaum.

Este punto resulta ser un atractor de atractores, como fue explicado por San Martín [66].

A diferencia de la CDP, la CBS-N no es conexa, además, la órbita q -periódica está en la banda 1-periódica, la $q \cdot 2$ -periódica en la banda 2-periódica y así sucesivamente.

La idea geométrica que subyace en la CBS-N es que cada extremo de f^{2^n} , se comporta como f [33], por lo que iterando q veces esta aproximación tendremos una órbita S-N q -periódica y en total una órbita S-N $q \cdot 2^n$ -periódica. Es bien sabido que cuando se obtiene $f^{2^{n+1}}$ a partir de f^{2^n} la mitad de los extremos se contraen en α_F y la otra mitad en α_F^2 , siendo α_F la constante de Feigenbaum, por lo tanto tras n duplicaciones habrá 2^n extremos próximos a $y = x$ contraídos entre α_F^n y $\alpha_F^{2^n}$. Estas contracciones jugarán un papel relevante en nuestro estudio, pues la órbita q -periódica contenida en cada extremo se habrá contraído de la misma manera y por lo tanto la distancia de los puntos S-N al extremo de f^{2^n} , (en cuyo entorno se encuentran), disminuirán en la misma proporción. Cuando esa distancia sea del orden o menor que ε , siendo ε la intensidad del acoplamiento, no se podrán observar las implicaciones a $O(\varepsilon)$.

En el teorema (7.1) se ha considerado que el punto x_1^* era el punto de la órbita de periodo q más cercano al punto crítico C de f . Para los siguientes teoremas utilizaremos la misma nomenclatura, seguiremos llamando x_1^* al punto de la órbita de periodo $q \cdot 2^p$ más cercano a C . Llamaremos caja central a aquella caja en la que está situado x_1^* . En dicha caja se encontrarán los puntos de la forma $\{x_{1+k \cdot 2^p}^*\}_{k=0, \dots, q-1}$, ya que como hemos dicho anteriormente se visita una caja con cada iterado, y por tanto se vuelve a la original tras 2^p iterados.

Como hemos mencionado anteriormente, las diversas cajas de la CBS-N se contraen por un factor α_F o α_F^2 . En consecuencia, la distancia entre los puntos dentro de una misma caja llegará a ser menor que ε , y en la caja central la derivada de los puntos será de orden igual o menor que ε^2 . Para observar estos fenómenos necesitaríamos desarrollar nuestras expresiones en sucesivas potencias de ε , según la cascada progresara, lo que es técnicamente inoperativo (no vamos a desarrollar a orden ε^{100} , por ejemplo) y matemáticamente muy complicado. Al avanzar en la cascada dejaríamos de

distinguir los puntos entre sí, tal y como se describe en los siguientes teoremas.

A continuación vamos a demostrar la existencia de la órbita de periodo $q \cdot 2^p$ en los siguientes casos:

a) Los puntos de la caja central cumplen que su distancia a C es menor que ε , y con esta consideración concluiremos que para dicho caso existe la onda periódica S-N: teorema 2.

b) En todas las cajas la distancia entre los puntos de una misma caja es menor que ε . En estas circunstancias no se podrán distinguir unos puntos de otros a $O(\varepsilon^2)$. Nuevamente encontraremos una expresión de dicha onda: teorema 3.

Empezaremos estudiando el caso a).

Teorema 2. Onda de la cascada de bifurcaciones S-N con caja central colapsada.

Sea $f : I \rightarrow I$, $f \in C^2$ una función unimodal dependiente de un parámetro, con punto crítico C , y sean $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_{q2^p}^*\}$ los puntos de una órbita de período $q2^p$ de f con $1 - f^{q2^p}(x_i^*) \leq O(\varepsilon)$. Si $f'(x_{1+k2^p}^*) \leq \varepsilon$, $k = 0, \dots, q-1$ entonces el CML dado por

$$\begin{aligned} X_i(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{q2^p} \sum_{j=1}^{q2^p} f(X_j(n)) \\ i &= 1, \dots, q2^p \quad \varepsilon \ll 1 \end{aligned}$$

presenta una solución periódica de periodo $q2^p$, dada por

$$\begin{aligned} X_{k2^p+i+1}(n+j) &= x_{k2^p+i+1+j}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+1+j} + O(\varepsilon^2) \\ k &= 0, \dots, q-1 \quad j \in \mathbb{N}^* \\ i &= 1, \dots, 2^p \end{aligned}$$

donde los valores

$$A_{k2^p+i+1} = \begin{cases} \alpha \left(-x_{k2^p+i+1}^* + \frac{1}{q2^p} \sum_{l=1}^{q2^p} x_l^* \right) + \\ + \alpha \sum_{n=2}^i \left((-x_{k2^p+n}^* + \frac{1}{q2^p} \sum_{l=1}^{q2^p} x_l^*) \prod_{l=n}^i f'(x_{k2^p+l}^*) \right) & i \neq 1 \\ \alpha \left(-x_{k2^p+2}^* + \frac{1}{q2^p} \sum_{l=1}^{q2^p} x_l^* \right) & i = 1 \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, 2^p \quad k = 0, \dots, q-1$$

con condiciones de periodicidad

$$\begin{aligned} A_{i+q2^p} &= A_i \quad \forall i \\ x_{i+q2^p}^* &= x_i^* \end{aligned}$$

Demostración

Para que exista la solución periódica dada por

$$\begin{aligned} X_{k2^p+i+1}(n+j) &= x_{k2^p+i+1+j}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+1+j} + O(\varepsilon^2) \\ k &= 0, \dots, q-1 \\ i &= 1, \dots, 2^p \end{aligned}$$

se tendrá que cumplir que el sistema a $O(\varepsilon)$

$$\begin{cases} X_{k2^p+i+1}(n) = x_{k2^p+i+1}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+1} \\ X_{k2^p+i+1}(n+1) = x_{k2^p+i+2}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+2} \\ \vdots \\ X_{k2^p+i+1}(n+q2^p-1) = x_{k2^p+i+q2^p}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+q2^p} \\ X_{k2^p+i+1}(n+q2^p) = x_{k2^p+i+1}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+1} \end{cases} \quad \begin{aligned} k &= 0, \dots, q-1 \\ i &= 1, \dots, 2^p \end{aligned}$$

deberá ser compatible determinado.

Como

$$X_{k2^p+i+1}(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_{k2^p+i+1}(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{q2^p} \sum_{j=1}^{q2^p} f(X_j(n)) \quad (7.11)$$

sustituyendo en esta expresión (7.11) por los valores iniciales de $X_i(n)$ se obtiene

$$\begin{aligned} x_{k2^p+i+2}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+2} + O(\varepsilon^2) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(x_{k2^p+i+1}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+1} + O(\varepsilon^2)) + \\ &+ \frac{\alpha\varepsilon}{q2^p} \sum_{j=1}^{q2^p} f(x_j^* + \varepsilon A_j + O(\varepsilon^2)) \end{aligned} \quad (7.12)$$

Haciendo la expansión de $f(x_{k2^p+i+1}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+1} + O(\varepsilon^2))$ hasta $O(\varepsilon^2)$ se tendrá

$$f(x_{k2^p+i+1}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+1} + O(\varepsilon^2)) = f(x_{k2^p+i+1}^*) + \varepsilon A_{k2^p+i+1} f'(x_{k2^p+i+1}^*) + O(\varepsilon^2)$$

y considerando si el punto $x_{k2^p+i+1}^*$ está o no en la caja central, se deben distinguir los siguientes casos

$$\text{i) } f'(x_{k2^p+i+1}^*) \gg \varepsilon$$

Es decir, $x_{k2^p+i+1}^* \quad i = 1, \dots, 2^p \quad k = 0, \dots, q-1$ no están en la caja central.

Sustituyendo el desarrollo de $f(x_{k2^p+i+1}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+1} + O(\varepsilon^2))$ en la expresión (7.12) se obtiene

$$\begin{aligned} x_{k2^p+i+2}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+2} + O(\varepsilon^2) &= (1 - \varepsilon \alpha) (x_{k2^p+i+2}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+1} f'(x_{k2^p+i+1}^*) + \\ &+ O(\varepsilon^2)) + \frac{\varepsilon \alpha}{q2^p} \sum_{j=1}^{q2^p} \left((x_{j+1}^* + \varepsilon A_j f'(x_j^*)) + O(\varepsilon^2) \right) \end{aligned}$$

y agrupando resulta

$$\begin{aligned} x_{k2^p+i+2}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+2} + O(\varepsilon^2) &= x_{k2^p+i+2}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+1} f'(x_{k2^p+i+1}^*) - \varepsilon \alpha x_{k2^p+i+2}^* + \\ &+ \frac{\alpha \varepsilon}{q2^p} \sum_{j=1}^{q2^p} x_{j+1}^* + O(\varepsilon^2) \\ i &= 1, \dots, q \quad k = 0, \dots, 2^{p-1} \end{aligned}$$

$$\text{ii) } f'(x_{k2^p+1}^*) \leq \varepsilon$$

Es decir, $x_{1+k2^p}^* \quad k = 0, \dots, q-1$ son los puntos de la caja central y estos puntos cumplen que están a una distancia del punto C menor o igual que ε .

Expandiendo resulta que

$$\begin{aligned} f(x_{k2^p+1}^* + \varepsilon A_{k2^p+1} + O(\varepsilon^2)) &= f(x_{k2^p+1}^*) + \varepsilon A_{k2^p+1} f'(x_{k2^p+1}^*) + \\ &+ \frac{1}{2} f''(x_{k2^p+1}^*) A_{k2^p+1}^2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^2) = f(x_{k2^p+1}^*) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

y sustituyendo en la expresión (7.12) se obtiene

$$x_{k2^p+2}^* + \varepsilon A_{k2^p+2} + O(\varepsilon^2) = x_{k2^p+2}^* - \varepsilon \alpha x_{k2^p+2}^* + \frac{\alpha \varepsilon}{q2^p} \sum_{j=1}^{q2^p} x_{j+1}^* + O(\varepsilon^2)$$

El sistema que resulta a $O(\varepsilon)$ es

$$\begin{cases} -A_{k2^p+i+1}f'(x_i^*) + A_{i+1} = -\alpha x_{i+1}^* + \frac{\alpha}{q2^p} \sum_{j=1}^{q2^p} x_{j+1}^* & i = 2, \dots, 2^p \quad k = 0, \dots, q-1 \\ A_{k2^p+2} = -\alpha x_2^* + \frac{\alpha}{q2^p} \sum_{j=1}^{q2^p} x_{j+1}^* & i = 1 \quad k = 0, \dots, q-1 \end{cases}$$

cuya expresión matricial por bloques es

$$\begin{pmatrix} B_1 & L_1 & \cdots & O & O \\ O & B_2 & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \cdots & B_{q-1} & L_1 \\ L_1 & O & \cdots & O & B_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^* \\ A_2^* \\ \vdots \\ A_q^* \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ \vdots \\ C_q^* \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

donde los bloques vienen dados por

$$B_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -f'(x_{(k-1)2^p+2}^*) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -f'(x_{(k-1)2^p+2^p-1}^*) & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -f'(x_{(k-1)2^p+2^p}^*) \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_k^* = \begin{pmatrix} A_{(k-1)2^p+1} \\ A_{(k-1)2^p+2} \\ \vdots \\ A_{(k-1)2^p+2^p} \end{pmatrix}$$

$$C_k^* = \begin{pmatrix} -x_{(k-1)2^p+2}^* + \frac{1}{q2^p} \sum_{j=1}^{q2^p} x_j^* \\ -x_{(k-1)2^p+3}^* + \frac{1}{q2^p} \sum_{j=1}^{q2^p} x_j^* \\ \vdots \\ -x_{(k-1)2^p+2^p+1}^* + \frac{1}{q2^p} \sum_{j=1}^{q2^p} x_j^* \end{pmatrix}$$

Este es un sistema de $q2^p$ ecuaciones con $q2^p$ incógnitas cuya matriz de los coeficientes tiene como determinante $(-1)^{q2^p+1}$, entonces el sistema resultante es compatible determinado para todo valor α . Además, la solución del sistema es distinta de la trivial, pues la columna de los términos independientes es no nula porque $x_1^* \neq x_2^* \neq \dots \neq x_{q2^p}^*$.

La solución del sistema se obtiene de (7.13) invirtiendo directamente, y resulta:

$$\begin{pmatrix} A_1^* \\ A_2^* \\ \vdots \\ A_q^* \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} B_1 & L_1 & \cdots & O & O \\ O & B_2 & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \cdots & B_{q-1} & L_1 \\ L_1 & O & \cdots & O & B_q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ \vdots \\ C_q^* \end{pmatrix}$$

La inversa de esta matriz $\begin{pmatrix} B_1 & L_1 & \cdots & O & O \\ O & B_2 & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \cdots & B_{q-1} & L_1 \\ L_1 & O & \cdots & O & B_q \end{pmatrix}$ es un caso particular de la matriz 4.1,

que se determinó en el teorema 1 del capítulo 4.

La inversión de la matriz lleva a la obtención de los valores A_i . Procederemos igual que en el teorema 1 de este capítulo, es decir, los valores de A_i se van a determinar empezando por A_2 , después A_3 , y así sucesivamente hasta llegar al valor de A_{q2^p} y por último A_1 , para ello la primera fila de la matriz inversa se traslada a la última fila. Esto nos implicará una nueva formulación de los bloques de las incógnitas A_i , ya que estamos pasando a la última posición a la incógnita A_1 . Inicialmente el bloque A_k^* era

$$A_k^* = \begin{pmatrix} A_{(k-1)2^p+1} \\ A_{(k-1)2^p+2} \\ \vdots \\ A_{(k-1)2^p+2^p} \end{pmatrix}$$

que con la nueva formulación pasará a ser el bloque que llamamos desplazado y que notaremos por

DA_k^*

$$DA_k^* = \begin{pmatrix} A_{(k-1)2^p+2} \\ A_{(k-1)2^p+2} \\ \vdots \\ A_{(k-1)2^p+2^p+1} \end{pmatrix}$$

Se elige este orden ya que al igual que en el teorema 1 de este capítulo, tras este cambio se obtiene una matriz triangular inferior que facilita la expresión de las soluciones. Con este cambio se tiene que

$$\begin{pmatrix} DA_1^* \\ DA_2^* \\ \vdots \\ DA_q^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & O & \cdots & O \\ O & E_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & E_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ \vdots \\ C_q^* \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

donde la matriz E_k está dada por

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ f'(x_{(k-1)2^p+2}^*) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ f'(x_{(k-1)2^p+2}^*)f'(x_{(k-1)2^p+3}^*) & f'(x_{(k-1)2^p+3}^*) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f'(x_{(k-1)2^p+2}^*) \cdots f'(x_{(k-1)2^p+2^p}^*) & f'(x_{(k-1)2^p+3}^*) \cdots f'(x_{(k-1)2^p+2^p}^*) & \cdots & f'(x_{(k-1)2^p+2^p}^*) & 1 \end{pmatrix}$$

$$k = 1, \dots, q$$

Obsérvese que todos los bloques E_k $k = 1, \dots, q$ son submatrices triangulares inferiores, ello se debe al hecho de haber desplazado la primera fila de la matriz inversa a la última.

Tras operar en (7.14) resulta:

$$A_{k2^p+i+1} = \begin{cases} \alpha \left(-x_{k2^p+i+1}^* + \frac{1}{q2^p} \sum_{l=1}^{q2^p} x_l^* \right) + \\ \alpha \sum_{n=2}^i \left(\left(-x_{k2^p+n}^* + \frac{1}{q2^p} \sum_{l=1}^{q2^p} x_l^* \right) \prod_{l=n}^i f'(x_{k2^p+l}^*) \right) & i \neq 1 \\ \alpha \left(-x_{k2^p+2}^* + \frac{1}{q2^p} \sum_{l=1}^{q2^p} x_l^* \right) & i = 1 \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, 2^p \quad k = 0, \dots, q-1 \quad \blacksquare$$

Según se va produciendo la CBS-N, los puntos de cada caja están cada vez más próximos, tal y como hemos indicado antes, ya que tras cada duplicación las cajas se contraen en α_F ó α_{F^2} y por lo tanto a partir de cierta duplicación, que es la que consideramos en esta sección, resulta que los puntos dentro de una misma caja estarán entre sí a una distancia menor que ε y además todos los puntos de la *caja central* y su *caja gemela* estarán tan cerca del punto crítico C que la derivada en estos puntos será de $O(\varepsilon^2)$ o menor. La razón geométrica de tal proceso es la siguiente: cada vez que se duplica el periodo de la órbita el extremo asociado al punto C se duplica, es decir, se generan dos extremos (dos cajas) de esas dos cajas, una de ellas es la *caja central* porque es un entorno del punto C y la otra caja es lo que denominamos *caja gemela* (ver figura 7.3). Si partimos de la órbita de periodo 2^p entonces la órbita duplicada será de periodo 2^{p+1} , en consecuencia los puntos de la caja central vienen dados por $\{x_{1+k2^{p+1}}^*\}_{k=0, \dots, q-1}$, mientras que los puntos de la caja gemela son $\{x_{1+2^p+k2^{p+1}}^*\}_{k=0, \dots, q-1}$. Por tanto debemos tener en cuenta, tanto en la caja central como en su gemela, que la derivada en dichos puntos será de $O(\varepsilon^2)$ o más pequeña, es decir, $f'(x_{1+k2^{p+1}}^*)$ y $f'(x_{1+2^p+k2^{p+1}}^*)$ $k = 0, 1, \dots, q-1$ será de $O(\varepsilon^2)$ o más pequeña. Por otro lado, las distancias entre los puntos de una misma caja se han contraído en α_F o α_{F^2} , acercándose cada vez más y más entre sí, hasta que la derivada es la misma para todos ellos a $O(\varepsilon^2)$.

Teorema 3. Onda de la cascada de bifurcaciones S-N con todas las cajas colapsadas.

Sea $f : I \rightarrow I$, $f \in C^2$ una función unimodal dependiente de un parámetro, con punto crítico en C , y sea $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_{q2^{p+1}}^*\}$ los puntos de una órbita de período $q2^{p+1}$ de f con $1 - f^{q2^{p+1}'}(x_i^*) \leq O(\varepsilon)$

tal que

$$\begin{aligned} \left| x_{1+k2^{p+1}}^* - C \right| &\leq \varepsilon & k = 0, \dots, q-1 \\ \left| x_{1+2^p+k2^{p+1}}^* - C \right| &\leq \varepsilon & k = 0, \dots, q-1 \\ \left| x_{i+k2^{p+1}}^* - x_i^* \right| &\leq \varepsilon & k = 0, \dots, q-1 \quad i \neq 1, 2^p \end{aligned}$$

entonces el CML dado por

$$\begin{aligned} X_i(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{q2^{p+1}} \sum_{j=1}^{q2^{p+1}} f(X_j(n)) \\ i &= 1, \dots, q2^{p+1} \quad \varepsilon \ll 1 \end{aligned}$$

presenta una solución periódica de periodo $q2^{p+1}$, dada por

$$\begin{aligned} X_{k2^{p+1}+i+1}(n+j) &= x_{k2^{p+1}+i+1+j}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i+1+j} + O(\varepsilon^2) \\ i &= 1, \dots, 2^{p+1} \quad j \in \mathbb{N}^* \\ k &= 0, \dots, q-1 \end{aligned}$$

donde los valores

$$A_{k2^{p+1}+i+1} = \begin{cases} \alpha \left(-x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \frac{1}{q2^{p+1}} \sum_{l=1}^{q2^{p+1}} x_l^* \right) + \\ + \alpha \sum_{n=2}^i \left(\left(-x_{k2^{p+1}+n}^* + \frac{1}{q2^{p+1}} \sum_{l=1}^{q2^{p+1}} x_l^* \right) \prod_{l=n}^i f'(x_l^*) \right) & i = 2, \dots, 2^p \\ \\ \alpha \left(-x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \frac{1}{q2^{p+1}} \sum_{l=1}^{q2^{p+1}} x_l^* \right) + \\ + \alpha \sum_{n=2^p+2}^i \left(\left(-x_{k2^{p+1}+n}^* + \frac{1}{q2^{p+1}} \sum_{l=1}^{q2^{p+1}} x_l^* \right) \prod_{l=n}^i f'(x_l^*) \right) & i = 2^p + 2, \dots, 2^{p+1} \\ \\ \alpha \left(-x_{2+k2^{p+1}}^* + \frac{1}{q2^{p+1}} \sum_{l=1}^{q2^{p+1}} x_l^* \right) & i = 1 \\ \\ \alpha \left(-x_{2^p+2+k2^{p+1}}^* + \frac{1}{q2^{p+1}} \sum_{l=1}^{q2^{p+1}} x_l^* \right) & i = 2^p + 1 \end{cases}$$

$$k = 0, \dots, q-1$$

con condiciones de periodicidad

$$\begin{aligned} A_{i+q2^{p+1}} &= A_i \quad \forall i \\ x_{i+q2^{p+1}}^* &= x_i^* \end{aligned}$$

NOTA: Obsérvese que los puntos de la caja central satisfacen $\left| x_{1+k2^{p+1}}^* - C \right| \leq \varepsilon$, tomando k los valores $0, \dots, q-1$; los puntos de la caja gemela verifican $\left| x_{1+2^p+k2^{p+1}}^* - C \right| \leq \varepsilon \quad k = 0, \dots, q-1$, y los de las restantes cajas cumplen $\left| x_{i+k2^{p+1}}^* - x_i^* \right| \leq \varepsilon \quad k = 0, \dots, q-1 \quad i \neq 1, 2^p$.

Demostración

Para que exista la solución periódica dada por

$$\begin{aligned} X_{k2^{p+1}+i}(n+j) &= x_{k2^{p+1}+i+j}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i+j} + O(\varepsilon^2) \\ k &= 0, \dots, q-1 \\ i &= 1, \dots, 2^{p+1} \end{aligned}$$

se tendrá que cumplir que el sistema a $O(\varepsilon)$

$$\left\{ \begin{array}{ll} X_{k2^{p+1}+i}(n) = & x_{k2^{p+1}+i}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i} \\ X_{k2^{p+1}+i}(n+1) = & x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i+1} \\ & \vdots \\ X_{k2^{p+1}+i}(n+q2^{p+1}-1) = & x_{k2^{p+1}+i+q2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i+q2^{p+1}} \\ X_{k2^{p+1}+i+1}(n+q2^{p+1}) = & x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i+1} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} k = 0, \dots, q-1 \\ i = 1, \dots, 2^{p+1} \end{array}$$

sea compatible determinado.

Como

$$X_{k2^{p+1}+i}(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_{k2^{p+1}+i}(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{q2^{p+1}} \sum_{j=1}^{q2^{p+1}} f(X_j(n)) \quad (7.15)$$

sustituyendo en esta expresión, (7.15), los valores iniciales de $X_j(n) = x_j^* + \varepsilon A_j + O(\varepsilon^2)$ se obtiene

$$\begin{aligned} x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i+1} + O(\varepsilon^2) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(x_{k2^{p+1}+i}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i} + O(\varepsilon^2)) + \\ &+ \frac{\alpha\varepsilon}{q2^{p+1}} \sum_{j=1}^{q2^{p+1}} f(x_j^* + \varepsilon A_j + O(\varepsilon^2)) \end{aligned} \quad (7.16)$$

Haciendo la expansión de $f(x_{k2^{p+1}+i}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i} + O(\varepsilon^2))$ hasta $O(\varepsilon^2)$ se tendrá

$$f(x_{k2^{p+1}+i}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i} + O(\varepsilon^2)) = f(x_{k2^{p+1}+i}^*) + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i} f'(x_{k2^{p+1}+i}^*) + O(\varepsilon^2)$$

y considerando si el punto $x_{k2^{p+1}+i}^*$ está en la caja central, en la gemela o en cualquier otra distinta a estas dos, se obtendrán expresiones distintas.

i) $\left| x_{1+k2^{p+1}}^* - C \right| \leq \varepsilon$, es decir, los puntos pertenecen a la caja central, entonces

$$\begin{aligned} f(x_{1+k2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{1+k2^{p+1}}) &= f(x_{1+k2^{p+1}}^*) + \varepsilon A_{1+k2^{p+1}} f'(x_{1+k2^{p+1}}^*) + \\ &+ \frac{1}{2} f''(x_{1+k2^{p+1}}^*) A_{1+k2^{p+1}}^2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^2) = f(x_{k2^{p+1}+1}^*) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

y sustituyendo en la expresión (7.16) se obtiene

$$x_{k2^{p+1}+2}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+2} + O(\varepsilon^2) = x_{k2^{p+1}+2}^* - \varepsilon \alpha x_{k2^{p+1}+1}^* + \frac{\alpha \varepsilon}{q2^{p+1}} \sum_{j=1}^{q2^{p+1}} x_{j+1}^* + O(\varepsilon^2)$$

ii) $\left| x_{2^p+k2^{p+1}}^* - C \right| \leq \varepsilon$, es decir, los puntos pertenecen a la caja gemela, entonces

$$\begin{aligned} f(x_{2^p+k2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2^p+k2^{p+1}} + O(\varepsilon^2)) &= f(x_{2^p+k2^{p+1}}^*) + \varepsilon A_{2^p+k2^{p+1}} f'(x_{2^p+k2^{p+1}}^*) + \\ &+ \frac{1}{2} f''(x_{2^p+k2^{p+1}}^*) A_{2^p+k2^{p+1}}^2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^2) = f(x_{k2^{p+1}+2^p}^*) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

y sustituyendo en la expresión (7.16) se obtiene

$$\begin{aligned} x_{2^p+k2^{p+1}+1}^* + \varepsilon A_{2^p+k2^{p+1}+1} + O(\varepsilon^2) &= x_{2^p+k2^{p+1}+1}^* - \varepsilon \alpha x_{2^p+k2^{p+1}+1}^* + \\ &+ \frac{\alpha \varepsilon}{q2^{p+1}} \sum_{j=1}^{q2^{p+1}} x_{j+1}^* + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

iii) $|x_{i+k2^{p+1}}^* - x_i^*| \leq \varepsilon$, es decir, los puntos están situados en cualquier caja distinta de la central y la gemela, se tiene

$$\begin{aligned} f(x_{i+k2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{i+k2^{p+1}} + O(\varepsilon^2)) &= f(x_{i+k2^{p+1}}^*) + \varepsilon A_{i+k2^{p+1}} f'(x_{i+k2^{p+1}}^*) + \\ &+ \frac{1}{2} f''(x_{i+k2^{p+1}}^*) A_{i+k2^{p+1}}^2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{7.17}$$

y desarrollando $f'(x_{i+k2^{p+1}}^*)$ se obtiene

$$f'(x_{i+k2^{p+1}}^*) = f'(x_i^* + (x_{i+k2^{p+1}}^* - x_i^*)) = f'(x_i^*) + f''(x_i^*)(x_{i+k2^{p+1}}^* - x_i^*)$$

y sustituyendo este desarrollo en la expresión anterior (7.17) resulta

$$f(x_{i+k2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{i+k2^{p+1}} + O(\varepsilon^2)) = f(x_{i+k2^{p+1}}^*) + \varepsilon A_{i+k2^{p+1}} f'(x_i^*) + O(\varepsilon^2)$$

por lo que la expresión (7.16) queda

$$\begin{aligned} x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i+1} + O(\varepsilon^2) &= (1 - \varepsilon\alpha) \left(x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \varepsilon A_{i+k2^{p+1}} f'(x_i^*) + \right. \\ &\quad \left. O(\varepsilon^2) \right) + \frac{\varepsilon\alpha}{q2^{p+1}} \sum_{j=1}^{q2^{p+1}} ((x_{j+1}^* + \varepsilon A_j f'(x_j^*)) + O(\varepsilon^2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i+1} + O(\varepsilon^2) &= x_{k2^p+i+1}^* + \varepsilon A_{k2^p+i} f'(x_i^*) - \varepsilon\alpha x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \\ &\quad \frac{\alpha\varepsilon}{q2^p} \sum_{j=1}^{q2^p} x_{j+1}^* + O(\varepsilon^2) \\ &\quad k = 0, \dots, q-1 \quad i \neq 0, i \neq 2^p \end{aligned}$$

El sistema que resulta es

$$\left\{ \begin{array}{ll} -A_{k2^{p+1}+i} f'(x_i^*) + A_{k2^{p+1}+i+1} = -\alpha x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \frac{\alpha}{q2^{p+1}} \sum_{j=1}^{q2^{p+1}} x_{j+1}^* & k = 0, \dots, q-1 \quad i \neq 0, i \neq 2^p \\ A_{k2^{p+1}+2} = -\alpha x_{k2^{p+1}+2}^* + \frac{\alpha\varepsilon}{q2^{p+1}} \sum_{j=1}^{q2^{p+1}} x_{j+1}^* & k = 0, \dots, q-1 \\ A_{2^p+k2^{p+1}+1} = -\alpha x_{2^p+k2^{p+1}+1}^* + \frac{\alpha\varepsilon}{q2^{p+1}} \sum_{j=1}^{q2^{p+1}} x_{j+1}^* & k = 0, \dots, q-1 \end{array} \right.$$

cuya expresión matricial se puede expresar de la forma

$$\begin{pmatrix} B_1 & L_1 & \cdots & O & O \\ O & B_2 & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \cdots & B_{q-1} & L_1 \\ L_1 & O & \cdots & O & B_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^* \\ A_2^* \\ \vdots \\ A_q^* \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ \vdots \\ C_q^* \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

siendo

$$\begin{aligned}
 B_k &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -f'(x_2^*) & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -f'(x_{2^p}^*) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -f'(x_{2^p+2}^*) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -f'(x_{2^{p+1}}^*) \end{pmatrix} \\
 L_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
 A_k^* &= \begin{pmatrix} A_{(k-1)2^{p+1}+1} \\ A_{(k-1)2^{p+1}+2} \\ \vdots \\ A_{(k-1)2^{p+1}+2^{p+1}} \end{pmatrix} \\
 C_k^* &= \begin{pmatrix} -x_{(k-1)2^{p+1}+2}^* + \frac{1}{q^{2^{p+1}}} \sum_{j=1}^{q^{2^{p+1}}} x_j^* \\ -x_{(k-1)2^{p+1}+3}^* + \frac{1}{q^{2^{p+1}}} \sum_{j=1}^{q^{2^{p+1}}} x_j^* \\ \vdots \\ -x_{(k-1)2^{p+1}+2^{p+1}+1}^* + \frac{1}{q^{2^{p+1}}} \sum_{j=1}^{q^{2^{p+1}}} x_j^* \end{pmatrix} \quad (7.19)
 \end{aligned}$$

Este es un sistema de $q^{2^{p+1}}$ ecuaciones con $q^{2^{p+1}}$ incógnitas cuya matriz de los coeficientes tiene como determinante $(-1)^{q^{2^{p+1}}+1}$ entonces el sistema resultante es compatible determinado para todo valor α . Además, la solución del sistema es distinta de la trivial, pues la columna de los términos independientes es no nula porque $x_1^* \neq x_2^* \neq \cdots \neq x_{q^{2^{p+1}}}^*$.

La solución del sistema se obtiene de (7.18) invirtiendo directamente, y resulta:

$$\begin{pmatrix} A_1^* \\ A_2^* \\ \vdots \\ A_{q-1}^* \\ A_q^* \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} B_1 & L_1 & \cdots & O & O \\ O & B_2 & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \cdots & B_{q-1} & L_1 \\ L_1 & O & \cdots & O & B_q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ \vdots \\ C_{q-1}^* \\ C_q^* \end{pmatrix}$$

La inversión de la matriz lleva a la obtención de los valores A_i . Los valores de A_i se van a determinar empezando por A_2 , después A_3 , y así sucesivamente hasta llegar al valor de A_{q2p+1} y por último A_1 . Como en el teorema 1 y 2 de este capítulo, una vez invertida la matriz se va a pasar la primera fila a la última. Esta traslación de la primera fila conlleva una traslación en los bloques de las incógnitas. Nuevamente se elige este orden para expresar la solución, ya que nos va a permitir una formulación más compacta. Tras la reordenación, la solución queda expresada de la forma siguiente

$$\begin{pmatrix} DA_1^* \\ DA_2^* \\ \vdots \\ DA_q^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & O & \cdots & O \\ O & E_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & E_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ \vdots \\ C_q^* \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

donde la matriz E_k , para todo valor de k , es

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ f'(x_2^*) & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ f'(x_2^*)f'(x_3^*) & f'(x_3^*) & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f'(x_2^*) \cdots f'(x_{2p}^*) & f'(x_3^*) \cdots f'(x_{2p}^*) & \cdots & f'(x_{2p}^*) & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f'(x_{2p+2}^*) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f'(x_{2p+2}^*)f'(x_{k2p+3}^*) & f'(x_{2p+3}^*) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f'(x_{2p+2}^*) \cdots f'(x_{2p+1}^*) & f'(x_{2p+3}^*) \cdots f'(x_{2p+1}^*) & \cdots & f'(x_{2p+1}^*) & 1 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que todos los E_k $k = 1, \dots, q$ son idénticos, por lo tanto cuando se realiza la multiplicación por cajas la contribución que proviene de los E_k es la misma. La única diferencia está en la columna de los términos independientes. Cada E_k tiene que multiplicar a los C_k^* de

la columna de los términos independientes (véase 7.20) y los C_k^* contienen los mismos elementos desplazados sus subíndices por 2^{p+1} (véase (7.19)). Teniendo en cuenta estas consideraciones y operando en (7.20) resulta:

$$A_{k2^{p+1}+i+1} = \begin{cases} \alpha \left(-x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \frac{1}{q2^{p+1}} \sum_{l=1}^{q2^{p+1}} x_l^* \right) + \\ + \alpha \sum_{n=2}^i \left((-x_{k2^{p+1}+n}^* + \frac{1}{q2^{p+1}} \sum_{l=1}^{q2^{p+1}} x_l^*) \prod_{l=n}^i f'(x_l^*) \right) & i = 2, \dots, 2^p \\ \\ \alpha \left(-x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \frac{1}{q2^{p+1}} \sum_{l=1}^{q2^{p+1}} x_l^* \right) \\ + \alpha \sum_{n=2^p+2}^i \left((-x_{k2^{p+1}+n}^* + \frac{1}{q2^{p+1}} \sum_{l=1}^{q2^{p+1}} x_l^*) \prod_{l=n}^i f'(x_l^*) \right) & i = 2^p + 2, \dots, 2^{p+1} \\ \\ \alpha \left(-x_{2+k2^{p+1}}^* + \frac{1}{q2^{p+1}} \sum_{l=1}^{q2^{p+1}} x_l^* \right) & i = 1 \\ \\ \alpha \left(-x_{2^p+k2^{p+1}+2}^* + \frac{1}{q2^{p+1}} \sum_{l=1}^{q2^{p+1}} x_l^* \right) & i = 2^p + 1 \end{cases}$$

$$k = 0, \dots, q-1$$

En general se podría hallar una solución para un problema concreto, es decir, aquel en que se conociera explícitamente los puntos de la órbita y el valor explícito de ε . Ello se debe a que la matriz de los sistemas que se nos plantea es un caso particular de la matriz que estudiamos en el teorema 1 del capítulo 4. En esta matriz podríamos sustituir todas las derivadas necesarias por los valores concretos del problema particular y dependiendo del ε del problema algunas de estas derivadas se podrían despreciar a $O(\varepsilon^2)$.

La existencia de órbitas en CML asociadas a la CBS-N era de esperar; ello se debe a que San Martín y Rodríguez-Pérez [67] demostraron que existe una conexión entre la CDP y la saddle-node, por lo tanto, al haber mostrado la existencia de órbitas en el CML asociadas a la CDP, (capítulo 4) cabía esperar la asociada a la CBS-N. De hecho, los autores demostraron tal relación tanto para cualquier ventana primaria como para ventanas dentro de ventanas; los resultados encontrados en este capítulo son coherentes con tales hechos, ya que nosotros hemos utilizado una órbita de periodo $p \cdot 2^n$ sin ninguna restricción sobre p . Por lo tanto, escribiendo $p = p_1 \cdot p_2$ en todos los teoremas demostrados en este capítulo, podemos considerar la ventana primaria de periodo $p_1 \cdot p_2$, o bien la ventana p_2 periódica dentro de la p_1 , o viceversa.

En el estudio que acabamos de realizar se ha trabajado en CML con acoplamiento de campo medio. A continuación realizaremos el estudio para un CML con acoplamiento a primeros vecinos.

7.3. Ondas saddle-node en un CML con acoplamiento a primeros vecinos

Teorema 4. Onda saddle-node.

Sea $f : I \rightarrow I$, $f \in C^2$ una función unimodal dependiente de un parámetro, con punto crítico en C , y sea $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*\}$ una órbita de período p de f con $1 - f^{p'}(x_1^*) \leq O(\varepsilon)$. Si $|x_1^* - C| \leq \varepsilon$ entonces el CML dado por

$$\begin{aligned} X_i(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2}(f(X_{i-1}(n)) + f(X_{i+1}(n))) \\ i &= 1, \dots, p \quad \varepsilon \ll 1 \end{aligned}$$

presenta una solución periódica de periodo p , dada por

$$\begin{aligned} X_i(n+j) &= x_{i+j}^* + \varepsilon A_{i+j} + O(\varepsilon^2) \\ i &= 1, \dots, p \\ j &\in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

donde

$$A_{i+1} = \begin{cases} \alpha \left[-x_{i+1}^* + \frac{1}{2}(x_i^* + x_{i+2}^*) + \sum_{n=2}^i \left((-x_n^* + \frac{1}{2}(x_{n-1}^* + x_{n+1}^*)) \prod_{l=n}^i f'(x_l^*) \right) \right] & i \neq 1 \\ \alpha \left(-x_{i+1}^* + \frac{1}{2}(x_i^* + x_{i+2}^*) \right) & i = 1 \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, p$$

con condiciones de periodicidad

$$\begin{aligned} A_{i+p} &= A_i \\ x_{i+p}^* &= x_i^* \end{aligned} \quad \forall i$$

Demostración

Para que exista la solución periódica dada por

$$X_i(n+j) = x_{i+j}^* + \varepsilon A_{i+j} + O(\varepsilon^2) \\ i = 1, \dots, p$$

se tendrá que cumplir que el sistema a $O(\varepsilon)$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_i(n) & = & x_i^* + \varepsilon A_i \\ X_i(n+1) & = & x_{i+1}^* + \varepsilon A_{i+1} \\ & \vdots & \\ X_i(n+p-1) & = & x_{i+p-1}^* + \varepsilon A_{i+p-1} = x_{i-1}^* + \varepsilon A_{i-1} \\ X_i(n+p) & = & x_i^* + \varepsilon A_i \end{array} \right. \quad i = 1 \dots p$$

sea compatible determinado.

Dado que la evolución del CML viene dada por

$$X_i(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (f(X_{i-1}(n)) + f(X_{i+1}(n)))$$

sustituyendo en esta expresión $X_i(n) = x_i^* + \varepsilon A_i + O(\varepsilon^2)$ se obtiene

$$x_{i+1}^* + \varepsilon A_{i+1} + O(\varepsilon^2) = (1 - \varepsilon\alpha)f(x_i^* + \varepsilon A_i + O(\varepsilon^2)) + \\ + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (f(x_{i-1}^* + \varepsilon A_{i-1} + O(\varepsilon^2)) + f(x_{i+1}^* + \varepsilon A_{i+1} + O(\varepsilon^2))) \quad (7.21)$$

Desarrollando $f(x_i^* + \varepsilon A_i)$ hasta $O(\varepsilon^2)$ se tendrá

$$f(x_i^* + \varepsilon A_i + O(\varepsilon^2)) = f(x_i^*) + \varepsilon A_i f'(x_i^*) + O(\varepsilon^2) \quad (7.22)$$

Ahora tenemos que distinguir dos casos:

$$\text{i) } |x_1^* - C| \leq \varepsilon$$

El punto x_1^* está a una distancia del centro C menor que ε , es decir haciendo un desarrollo de Taylor de la función f' alrededor de C se obtiene

$$f'(x_1^*) = f'(C) + f''(C)(x_1^* - C) + O(\varepsilon^2) = \\ = 0 + f''(C)(x_1^* - C)$$

sustituyendo en (7.22) queda

$$f(x_1^* + \varepsilon A_1 + O(\varepsilon^2)) = f(x_1^*) + O(\varepsilon^2) = x_2^* + O(\varepsilon^2)$$

introduciendo este resultado en (7.21) se tiene

$$x_2^* + \varepsilon A_2 + O(\varepsilon^2) = x_2^* - \varepsilon \alpha x_2^* + \frac{\varepsilon \alpha}{2}(x_3^* + x_1^*) + O(\varepsilon^2)$$

ii) $|x_i^* - C| > \varepsilon \quad i = 2, \dots, p$

Estos son los restantes puntos de la órbita, por tanto se tiene que

$$f(x_i^* + \varepsilon A_i + O(\varepsilon^2)) = f(x_i^*) + \varepsilon A_i f'(x_i^*) + O(\varepsilon^2)$$

y sustituyendo en la expresión (7.21) resulta

$$\begin{aligned} x_{i+1}^* + \varepsilon A_{i+1} + O(\varepsilon^2) &= (1 - \varepsilon \alpha)(x_{i+1}^* + \varepsilon A_i f'(x_i^*) + O(\varepsilon^2)) + \\ &+ \frac{\varepsilon \alpha}{2}(x_i^* + x_{i+2}^*) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} x_{i+1}^* + \varepsilon A_{i+1} + O(\varepsilon^2) &= x_{i+1}^* + \varepsilon A_i f'(x_i^*) - \varepsilon \alpha x_{i+1}^* + \\ &+ \frac{\varepsilon \alpha}{2}(x_i^* + x_{i+2}^*) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Por lo tanto a orden ε , el sistema que debemos resolver será

$$\begin{cases} -A_i f'(x_i^*) + A_{i+1} = -\alpha x_{i+1}^* + \frac{\alpha}{2}(x_i^* + x_{i+2}^*) & i = 2, \dots, p \\ A_2 = -\alpha x_2^* + \frac{\alpha}{2}(x_p^* + x_1^*) & i = 1 \end{cases}$$

cuya expresión matricial es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -f'(x_2^*) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -f'(x_3^*) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -f'(x_p^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -x_2^* + \frac{1}{2}(x_3^* + x_1^*) \\ -x_3^* + \frac{1}{2}(x_4^* + x_2^*) \\ -x_4^* + \frac{1}{2}(x_5^* + x_3^*) \\ \vdots \\ -x_1^* + \frac{1}{2}(x_2^* + x_p^*) \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

Este es un sistema de p ecuaciones con p incógnitas cuya matriz de los coeficiente tiene como determinante $(-1)^{p+1}$, entonces el sistema resultante es compatible determinado. Además, la solución del sistema es distinta de la trivial para todo valor $\alpha \neq 0$, pues la columna de los términos independientes es no nula porque $x_1^* \neq x_2^* \neq \dots \neq x_p^*$.

La solución del sistema se obtiene de (7.23) invirtiendo directamente, y resulta:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -f'(x_2^*) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -f'(x_3^*) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -f'(x_p^*) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -x_2^* + \frac{1}{2}(x_3^* + x_1^*) \\ -x_3^* + \frac{1}{2}(x_4^* + x_2^*) \\ -x_4^* + \frac{1}{2}(x_5^* + x_3^*) \\ \vdots \\ -x_1^* + \frac{1}{2}(x_2^* + x_p^*) \end{pmatrix}$$

La inversión de la matriz lleva al resultado:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix} = \alpha MN \tag{7.24}$$

donde la matriz M es

$$M = \begin{pmatrix} f'(x_2^*) \cdots f'(x_p^*) & f'(x_3^*) \cdots f'(x_p^*) & f'(x_4^*) \cdots f'(x_p^*) & \cdots & f'(x_p^*) & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ f'(x_2) & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f'(x_2^*) \cdots f'(x_{p-1}^*) & f'(x_3^*) \cdots f'(x_{p-1}^*) & f'(x_4^*) \cdots f'(x_{p-1}^*) & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$N = \begin{pmatrix} -x_2^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ -x_3^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ -x_4^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \\ \vdots \\ -x_1^* + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_j^* \end{pmatrix}$$

Operando en (7.24) la solución se puede expresar de la forma

$$A_{i+1} = \begin{cases} \alpha \left[-x_{i+1}^* + \frac{1}{2} (x_i^* + x_{i+2}^*) + \sum_{n=2}^i \left((-x_n^* + \frac{1}{2} (x_{n-1}^* + x_{n+1}^*)) \prod_{l=n}^i f'(x_l^*) \right) \right] & i \neq 1 \\ \alpha \left(-x_{i+1}^* + \frac{1}{2} (x_i^* + x_{i+2}^*) \right) & i = 1 \quad \blacksquare \end{cases}$$

Con este resultado hemos podido concluir la existencia de la onda de periodo p en CML con acoplamiento a primeros vecinos cuando uno de los puntos de la onda, por ejemplo el x_1^* , está muy próximo al extremo C de f .

7.4. Ondas asociadas a la cascada de bifurcación Saddle-Node en un CML con acoplamiento a primeros vecinos.

De manera similar al estudio realizado anteriormente, nos plantearemos la existencia de la cascada S-N en dos casos distintos:

- i) Los puntos de la caja central cumplen que su distancia entre ellos es menor que ε , estudio que abordaremos en el teorema 5.
- ii) En todos las cajas la distancia entre los puntos de una misma caja es menor que ε , estudio que realizaremos en el teorema 6.

Teorema 5. Onda de la cascada de bifurcaciones S-N con caja central colapsada.

Sea $f : I \rightarrow I$, $f \in C^2$ una función unimodal dependiente de un parámetro, con punto crítico C , y sean $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_{q^{2^p}}^*\}$ los puntos de una órbita de período q^{2^p} de f con $1 - f^{q^{2^p}}(x_i^*) \leq O(\varepsilon)$.

Si $f'(x_{1+k2^p}^*) \leq \varepsilon$, $k = 0, \dots, q-1$, entonces el CML dado por

$$\begin{aligned} X_i(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (f(X_{i-1}(n)) + f(X_{i+1}(n))) \\ i &= 1, \dots, q2^p \quad \varepsilon \ll 1 \end{aligned}$$

presenta una solución periódica de periodo $q2^p$, dada por

$$\begin{aligned} X_{k2^p+i+1}(n+j) &= x_{k2^p+i+1+j}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+1+j} + O(\varepsilon^2) \\ k &= 0, \dots, q-1 \quad j \in \mathbb{N}^* \\ i &= 1, \dots, 2^p \end{aligned}$$

donde los valores

$$A_{k2^p+i+1} = \begin{cases} \alpha \left(-x_{k2^p+i+1}^* + \frac{1}{2}(x_{k2^p+i}^* + x_{k2^p+i+2}^*) \right) + \\ + \alpha \sum_{n=2}^i \left((-x_{k2^p+n}^* + \frac{1}{2}(x_{k2^p+n+1}^* + x_{k2^p+n-1}^*)) \prod_{l=n}^i f'(x_{k2^p+l}^*) \right) & i \neq 1 \\ \alpha \left(-x_{k2^p+2}^* + \frac{1}{2}(x_{k2^p+1}^* + x_{k2^p+i+3}^*) \right) & i = 1 \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, 2^p \quad k = 0, \dots, q-1$$

con condiciones de periodicidad

$$\begin{aligned} A_{i+q2^p} &= A_i \quad \forall i \\ x_{i+q2^p}^* &= x_i^* \end{aligned}$$

Demostración

Para que exista la onda periódica dada por

$$\begin{aligned} X_{k2^p+i+1}(n+j) &= x_{k2^p+i+1+j}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+1+j} + O(\varepsilon^2) \\ k &= 0, \dots, q-1 \\ i &= 1, \dots, 2^p \end{aligned}$$

se tendrá que cumplir que el sistema a $O(\varepsilon)$

$$\left\{ \begin{array}{ll} X_{k2^p+i+1}(n) = & x_{k2^p+i+1}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+1} \\ X_{k2^p+i+1}(n+1) = & x_{k2^p+i+2}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+2} \\ & \vdots \\ X_{k2^p+i+1}(n+q2^p-1) = & x_{k2^p+i+q2^p}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+q2^p} \\ X_{k2^p+i+1}(n+q2^p) = & x_{k2^p+i+1}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+1} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} k = 0, \dots, q-1 \\ i = 1, \dots, 2^p \end{array}$$

deberá ser compatible determinado.

Como

$$X_{k2^p+i+1}(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_{k2^p+i+1}(n)) + \frac{\varepsilon\alpha}{2}(f(X_{k2^p+i}(n)) + f(X_{k2^p+i+2}(n)))$$

sustituyendo en esta expresión por los valores iniciales de $X_i(n)$ se obtiene

$$\begin{aligned} x_{k2^p+i+2}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+2} + O(\varepsilon^2) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(x_{k2^p+i+1}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+1} + O(\varepsilon^2)) + \\ &+ \frac{\varepsilon\alpha}{2}(f(x_{k2^p+i}^* + \varepsilon A_{k2^p+i} + O(\varepsilon^2)) + f(x_{k2^p+i+2}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+2} + O(\varepsilon^2))) \end{aligned} \quad (7.25)$$

Haciendo la expansión de $f(x_{k2^p+i+1}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+1} + O(\varepsilon^2))$ hasta $O(\varepsilon^2)$ se tendrá

$$f(x_{k2^p+i+1}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+1} + O(\varepsilon^2)) = f(x_{k2^p+i+1}^*) + \varepsilon A_{k2^p+i+1} f'(x_{k2^p+i+1}^*) + O(\varepsilon^2) \quad (7.26)$$

y considerando si el punto $x_{k2^p+i+1}^*$ está o no en la caja central, se deben distinguir los siguientes casos

i) $f'(x_{k2^p+i+1}^*) \gg \varepsilon$, es decir, estos puntos no están en la caja central.

Se tiene sustituyendo (7.26) en la expresión (7.25) que

$$\begin{aligned} x_{k2^p+i+2}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+2} + O(\varepsilon^2) &= (1 - \varepsilon\alpha)(x_{k2^p+i+2}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+1} f'(x_{k2^p+i+1}^*) + \\ &+ O(\varepsilon^2)) + \frac{\varepsilon\alpha}{2}(x_{k2^p+i+1}^* + x_{k2^p+i+3}^*) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

y agrupando se obtiene

$$\begin{aligned} x_{k2^p+i+2}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+2} + O(\varepsilon^2) &= x_{k2^p+i+2}^* + \varepsilon A_{k2^p+i+1} f'(x_{k2^p+i+1}^*) - \varepsilon\alpha x_{k2^p+i+2}^* + \\ &+ \frac{\varepsilon\alpha}{2}(x_{k2^p+i+1}^* + x_{k2^p+i+3}^*) + O(\varepsilon^2) \\ &\quad i = 1, \dots, q \quad k = 0, \dots, 2^{p-1} \end{aligned}$$

ii) $f'(x_{k2^p+1}^*) \leq \varepsilon$, es decir, estos puntos están en la caja central, entonces

$$f(x_{k2^p+1}^* + \varepsilon A_{k2^p+1} + O(\varepsilon^2)) = f(x_{k2^p+1}^*) + \varepsilon A_{k2^p+1} f'(x_{k2^p+1}^*) + \frac{1}{2} f''(x_{k2^p+1}^*) A_{k2^p+1}^2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^2) = f(x_{k2^p+1}^*) + O(\varepsilon^2)$$

y sustituyendo en la expresión (7.25) se obtiene

$$x_{k2^p+2}^* + \varepsilon A_{k2^p+2} + O(\varepsilon^2) = x_{k2^p+2}^* - \varepsilon \alpha x_{k2^p+2}^* + \frac{\varepsilon \alpha}{2} (x_{k2^p+i+1}^* + x_{k2^p+i+3}^*) + O(\varepsilon^2)$$

El sistema que resulta es

$$\begin{cases} -A_{k2^p+i+1} f'(x_i^*) + A_{i+1} = -\alpha x_{i+1}^* + \frac{\alpha}{2} (x_{k2^p+i+1}^* + x_{k2^p+i+3}^*) & i = 2, \dots, 2^p \quad k = 0, \dots, q-1 \\ A_{k2^p+2} = -\alpha x_{k2^p+2}^* + \frac{\alpha}{2} (x_{k2^p+i+1}^* + x_{k2^p+i+3}^*) & i = 1 \quad k = 0, \dots, q-1 \end{cases}$$

cuya expresión matricial se puede expresar de la forma

$$\begin{pmatrix} B_1 & L_1 & \cdots & O & O \\ O & B_2 & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \cdots & B_{q-1} & L_1 \\ L_1 & O & \cdots & O & B_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^* \\ A_2^* \\ \vdots \\ A_q^* \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ \vdots \\ C_q^* \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

siendo

$$B_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -f'(x_{(k-1)2^p+2}^*) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -f'(x_{(k-1)2^p+2^p-1}^*) & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -f'(x_{(k-1)2^p+2^p}^*) \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_k^* = \begin{pmatrix} A_{(k-1)2^p+1} \\ A_{(k-1)2^p+2} \\ \vdots \\ A_{(k-1)2^p+2^p} \end{pmatrix}$$

$$C_k^* = \begin{pmatrix} -x_{(k-1)2^p+2}^* + \frac{1}{2} \left(x_{(k-1)2^p+1}^* + x_{(k-1)2^p+3}^* \right) \\ -x_{(k-1)2^p+3}^* + \frac{1}{2} \left(x_{(k-1)2^p+2}^* + x_{(k-1)2^p+4}^* \right) \\ \vdots \\ -x_{(k-1)2^p+2^p+1}^* + \frac{1}{2} \left(x_{(k-1)2^p+2^p}^* + x_{(k-1)2^p+2^p+2}^* \right) \end{pmatrix}$$

Este es un sistema de $q2^p$ ecuaciones con $q2^p$ incógnitas cuya matriz de los coeficientes tiene como determinante $(-1)^{q2^p+1}$, entonces el sistema resultante es compatible determinado para todo valor α . Además, la solución del sistema es distinta de la trivial, pues la columna de los términos independientes es no nula porque $x_1^* \neq x_2^* \neq \dots \neq x_{q2^p}^*$.

La solución del sistema se obtiene de (7.27) invirtiendo directamente, y resulta:

$$\begin{pmatrix} A_1^* \\ A_2^* \\ \vdots \\ A_{q-1}^* \\ A_q^* \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} B_1 & L_1 & \cdots & O & O \\ O & B_2 & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \cdots & B_{q-1} & L_1 \\ L_1 & O & \cdots & O & B_q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ \vdots \\ C_{q-1}^* \\ C_q^* \end{pmatrix}$$

La inversión de la matriz lleva a la obtención de los valores A_i . Los valores de A_i se van a determinar empezando por A_2 , después A_3 , y así sucesivamente hasta llegar al valor de A_{q2^p} y por último A_1 , es decir, trasladamos la primera fila de la matriz inversa a la última fila, esto nos implica que también trasladamos las incógnitas de cada bloque. Igual que en los teoremas anteriores, de este capítulo, esta reordenación nos permite una formulación más simple de las soluciones. La solución queda expresada de la forma siguiente

$$\begin{pmatrix} DA_1^* \\ DA_2^* \\ \vdots \\ DA_q^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & O & \cdots & O \\ O & E_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & E_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ \vdots \\ C_q^* \end{pmatrix} \quad (7.28)$$

donde la matriz E_k está dada por

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ f'(x_{(k-1)2^p+2}^*) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ f'(x_{(k-1)2^p+2}^*)f'(x_{(k-1)2^p+3}^*) & f'(x_{(k-1)2^p+3}^*) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f'(x_{(k-1)2^p+2}^*) \cdots f'(x_{(k-1)2^p+2^p}^*) & f'(x_{(k-1)2^p+3}^*) \cdots f'(x_{(k-1)2^p+2^p}^*) & \cdots & f'(x_{(k-1)2^p+2^p}^*) & 1 \end{pmatrix}$$

$$k = 1, \dots, q$$

Tras operar en (7.28) resulta:

$$A_{k2^p+i+1} = \begin{cases} \alpha \left(-x_{k2^p+i+1}^* + \frac{1}{2}(x_{k2^p+i}^* + x_{k2^p+i+2}^*) \right) + & i \neq 1 \\ \sum_{n=2}^i \left((-x_{k2^p+n}^* + \frac{1}{2}(x_{k2^p+n+1}^* + x_{k2^p+n-1}^*)) \prod_{l=n}^i f'(x_{k2^p+l}^*) \right) & \\ \alpha \left(-x_{k2^p+2}^* + \frac{1}{2}(x_{k2^p+1}^* + x_{k2^p+i+3}^*) \right) & i = 1 \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, 2^p \quad k = 0, \dots, q-1 \quad \blacksquare$$

Por último vamos a considerar las mismas circunstancias que en el teorema 3 de este capítulo, por tanto, van a ser válidas las mismas consideraciones geométricas que permiten considerar que, tanto en la caja central como en la gemela, la derivada en todos los puntos de dicha caja es de $O(\varepsilon^2)$ o menor, y que en las restantes cajas los puntos están tan cerca que su derivada es la misma a orden ε^2 (véase el párrafo precedente al teorema 3 de este capítulo para más detalles).

Teorema 6. Onda de la cascada de bifurcaciones S-N con todas las cajas colapsadas.

Sea $f : I \rightarrow I$, $f \in C^2$ una función unimodal dependiente de un parámetro, con punto crítico en C , y sea $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_{q2^{p+1}}^*\}$ los puntos de una órbita de período $q2^{p+1}$ de f con $1 - f^{q2^{p+1}'}(x_i^*) \leq O(\varepsilon)$ tal que

$$\begin{aligned} \left| x_{1+k2^{p+1}}^* - C \right| &\leq \varepsilon & k = 0, \dots, q-1 \\ \left| x_{1+2^p+k2^{p+1}}^* - C \right| &\leq \varepsilon & k = 0, \dots, q-1 \\ \left| x_{i+k2^{p+1}}^* - x_i^* \right| &\leq \varepsilon & k = 0, \dots, q-1 \quad i \neq 1, 2^p \end{aligned}$$

entonces el CML dado por

$$\begin{aligned} X_i(n+1) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(X_i(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (f(X_{i-1}(n)) + f(X_{i+1}(n))) \\ i &= 1, \dots, q2^{p+1} \quad \varepsilon \ll 1 \end{aligned}$$

presenta una solución periódica de periodo $q2^{p+1}$, dada por

$$\begin{aligned} X_{k2^{p+1}+i+1}(n+j) &= x_{k2^{p+1}+i+1+j}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i+1+j} + O(\varepsilon^2) \\ i &= 1, \dots, 2^{p+1} \quad j \in \mathbb{N}^* \\ k &= 0, \dots, q-1 \end{aligned}$$

donde los valores

$$A_{k2^{p+1}+i+1} = \begin{cases} \alpha \left(-x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \frac{1}{2} \left(x_{k2^{p+1}+i}^* + x_{k2^{p+1}+i+2}^* \right) \right) + \\ + \alpha \sum_{n=2}^i \left(-x_{k2^{p+1}+n}^* + \frac{1}{2} \left(x_{k2^{p+1}+n+1}^* + x_{k2^{p+1}+n-1}^* \right) \right) \prod_{l=n}^i f'(x_l^*) & i = 2, \dots, 2^p \\ \\ \alpha \left(-x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \frac{1}{2} \left(x_{k2^{p+1}+i}^* + x_{k2^{p+1}+i+2}^* \right) \right) + \\ + \alpha \sum_{n=2^p+2}^i \left(-x_{k2^{p+1}+n}^* + \frac{1}{2} \left(x_{k2^{p+1}+n+1}^* + x_{k2^{p+1}+n-1}^* \right) \right) \prod_{l=n}^i f'(x_l^*) & i = 2^p + 2, \dots, 2^{p+1} \\ \\ \alpha \left(-x_{2+k2^p+1}^* + \frac{1}{2} \left(x_{k2^p+1+1}^* + x_{k2^p+1+3}^* \right) \right) & i = 1 \\ \\ \alpha \left(-x_{2^p+2+k2^p+1}^* + \frac{1}{2} \left(x_{2^p+k2^p+1+1}^* + x_{2^p+k2^p+1+3}^* \right) \right) & i = 2^p + 1 \end{cases}$$

$$k = 0, \dots, q - 1$$

con condiciones de periodicidad

$$\begin{aligned} A_{i+q2^{p+1}} &= A_i \quad \forall i \\ x_{i+q2^{p+1}}^* &= x_i^* \end{aligned}$$

(Véase la NOTA del teorema 3).

Demostración

Para que exista la solución periódica dada por

$$\begin{aligned} X_{k2^{p+1}+i}(n+j) &= x_{k2^{p+1}+i+j}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i+j} + O(\varepsilon^2) \\ k &= 0, \dots, q - 1 \\ i &= 1, \dots, 2^{p+1} \end{aligned}$$

se tendrá que cumplir que el sistema a $O(\varepsilon)$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \begin{aligned} X_{k2^{p+1}+i}(n) &= x_{k2^{p+1}+i}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i} \\ X_{k2^{p+1}+i}(n+1) &= x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i+1} \\ &\vdots \\ X_{k2^{p+1}+i}(n+q2^{p+1}-1) &= x_{k2^{p+1}+i+q2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i+q2^{p+1}} \\ X_{k2^{p+1}+i+1}(n+q2^{p+1}) &= x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i+1} \end{aligned} & \begin{aligned} k &= 0, \dots, q - 1 \\ i &= 1, \dots, 2^{p+1} \end{aligned} \end{array} \right.$$

sea compatible determinado.

Como

$$X_{k2^{p+1}+i}(n+1) = (1 - \varepsilon\alpha)f(X_{k2^{p+1}+i}(n)) + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (f(X_{i-1}(n)) + f(X_{i+1}(n)))$$

sustituyendo en esta expresión los valores iniciales de $X_i(n)$ se obtiene

$$\begin{aligned} x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i+1} + O(\varepsilon^2) &= (1 - \varepsilon\alpha)f(x_{k2^{p+1}+i}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i}) + \\ &+ \frac{\alpha\varepsilon}{2} \left(f(x_{k2^{p+1}+i-1}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i-1}) + f(x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i+1}) \right) \end{aligned} \quad (7.29)$$

Haciendo la expansión de $f(x_{k2^{p+1}+i}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i} + O(\varepsilon^2))$ hasta $O(\varepsilon^2)$ se tendrá

$$f(x_{k2^{p+1}+i}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i} + O(\varepsilon^2)) = f(x_{k2^{p+1}+i}^*) + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i} f'(x_{k2^{p+1}+i}^*) + O(\varepsilon^2)$$

y considerando si el punto $x_{k2^{p+1}+i}^*$ está en la caja central, en la gemela o en cualquier otra distinta a estas dos, se obtendrán expresiones distintas.

i) $\left| x_{1+k2^{p+1}}^* - C \right| \leq \varepsilon$, es decir, los puntos pertenecen a la caja central, entonces

$$\begin{aligned} f(x_{1+k2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{1+k2^{p+1}} + O(\varepsilon^2)) &= f(x_{1+k2^{p+1}}^*) + \varepsilon A_{1+k2^{p+1}} f'(x_{1+k2^{p+1}}^*) + \\ &+ \frac{1}{2} f''(x_{1+k2^{p+1}}^*) A_{1+k2^{p+1}}^2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) = f(x_{k2^{p+1}+1}^*) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

y sustituyendo en la expresión (7.29) se obtiene

$$x_{k2^{p+1}+2}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+2} + O(\varepsilon^2) = x_{k2^{p+1}+2}^* - \varepsilon \alpha x_{k2^{p+1}+1}^* + \frac{\alpha \varepsilon}{2} (x_{k2^{p+1}+1}^* + x_{k2^{p+1}+3}^*) + O(\varepsilon^2)$$

ii) $\left| x_{2^p+k2^{p+1}}^* - C \right| \leq \varepsilon$, es decir, los puntos pertenecen a la caja gemela, entonces

$$\begin{aligned} f(x_{2^p+k2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{2^p+k2^{p+1}} + O(\varepsilon^2)) &= f(x_{2^p+k2^{p+1}}^*) + \varepsilon A_{2^p+k2^{p+1}} f'(x_{2^p+k2^{p+1}}^*) + \\ &+ \frac{1}{2} f''(x_{2^p+k2^{p+1}}^*) A_{2^p+k2^{p+1}}^2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) = f(x_{k2^{p+1}+2^p}^*) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

y sustituyendo en la expresión (7.29) se obtiene

$$\begin{aligned} x_{2^p+k2^{p+1}+1}^* + \varepsilon A_{2^p+k2^{p+1}+1} + O(\varepsilon^2) &= x_{2^p+k2^{p+1}+1}^* - \varepsilon \alpha x_{2^p+k2^{p+1}+1}^* + \\ &\frac{\alpha \varepsilon}{2} (x_{2^p+k2^{p+1}}^* + x_{2^p+k2^{p+1}+2}^*) \end{aligned}$$

iii) $|x_{i+k2^{p+1}}^* - x_i^*| \leq \varepsilon$, es decir, los puntos están en una caja distinta de la central y de la gemela, se tiene entonces

$$\begin{aligned} f(x_{i+k2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{i+k2^{p+1}} + O(\varepsilon^2)) &= f(x_{i+k2^{p+1}}^*) + \varepsilon A_{i+k2^{p+1}} f'(x_{i+k2^{p+1}}^*) \\ &+ \frac{1}{2} f''(x_{i+k2^{p+1}}^*) A_{i+k2^{p+1}}^2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{7.30}$$

y desarrollando $f'(x_{i+k2^{p+1}}^*)$ se obtiene

$$f'(x_{i+k2^{p+1}}^*) = f'(x_i^* + (x_{i+k2^{p+1}}^* - x_i^*)) = f'(x_i^*) + f''(x_i^*)(x_{i+k2^{p+1}}^* - x_i^*)$$

y sustituyendo este desarrollo en la expresión anterior (7.30) resulta

$$f(x_{i+k2^{p+1}}^* + \varepsilon A_{i+k2^{p+1}} + O(\varepsilon^2)) = f(x_{i+k2^{p+1}}^*) + \varepsilon A_{i+k2^{p+1}} f'(x_i^*) + O(\varepsilon^2)$$

por lo que la expresión (7.29) queda

$$\begin{aligned} x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i+1} + O(\varepsilon^2) &= (1 - \varepsilon\alpha)(x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \varepsilon A_{i+k2^{p+1}} f'(x_i^*) + O(\varepsilon^2)) + \\ &+ \frac{\alpha\varepsilon}{2} (x_{k2^{p+1}+i}^* + x_{k2^{p+1}+i+2}^*) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i+1} + O(\varepsilon^2) &= x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \varepsilon A_{k2^{p+1}+i} f'(x_i^*) - \varepsilon\alpha x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \\ &+ \frac{\alpha\varepsilon}{2} (x_{k2^{p+1}+i}^* + x_{k2^{p+1}+i+2}^*) + O(\varepsilon^2) \\ &k = 0, \dots, q-1 \quad i \neq 0, i \neq 2^p \end{aligned}$$

El sistema que resulta a $O(\varepsilon)$ es

$$\begin{cases} -A_{k2^{p+1}+i} f'(x_i^*) + A_{k2^{p+1}+i+1} = -\alpha x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \frac{\alpha}{2} (x_{k2^{p+1}+i}^* + x_{k2^{p+1}+i+2}^*) & k = 0, \dots, q-1 \quad i \neq 0, 2^p \\ A_{k2^{p+1}+2} = -\alpha x_{k2^{p+1}+2}^* + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (x_{k2^{p+1}+1}^* + x_{k2^{p+1}+3}^*) & k = 0, \dots, q-1 \\ A_{2^p+k2^{p+1}+1} = -\alpha x_{2^p+k2^{p+1}+1}^* + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (x_{2^p+k2^{p+1}}^* + x_{2^p+k2^{p+1}+2}^*) & k = 0, \dots, q-1 \end{cases}$$

cuya expresión matricial se puede expresar de la forma

$$\begin{pmatrix} B_1 & L_1 & \cdots & O & O \\ O & B_2 & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \cdots & B_{q-1} & L_1 \\ L_1 & O & \cdots & O & B_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^* \\ A_2^* \\ \vdots \\ A_{q-1}^* \\ A_q^* \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ \vdots \\ C_{q-1}^* \\ C_q^* \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

siendo

$$B_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -f'(x_2^*) & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -f'(x_{2^p}^*) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -f'(x_{2^{p+2}}^*) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -f'(x_{2^{p+1}}^*) \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_k^* = \begin{pmatrix} A_{(k-1)2^{p+1}+1} \\ A_{(k-1)2^{p+1}+2} \\ \vdots \\ A_{(k-1)2^{p+1}+2^{p+1}} \end{pmatrix}$$

$$C_k^* = \begin{pmatrix} -x_{(k-1)2^{p+1}+2}^* + \frac{1}{2} \left(x_{(k-1)2^{p+1}+3}^* + x_{(k-1)2^{p+1}+1}^* \right) \\ -x_{(k-1)2^{p+1}+3}^* + \frac{1}{2} \left(x_{(k-1)2^{p+1}+4}^* + x_{(k-1)2^{p+1}+2}^* \right) \\ \vdots \\ -x_{(k-1)2^{p+1}+2^{p+1}+1}^* + \frac{1}{2} \left(x_{(k-1)2^{p+1}+2^{p+1}}^* + x_{(k-1)2^{p+1}+2^{p+1}+2}^* \right) \end{pmatrix}$$

Este es un sistema de $q2^{p+1}$ ecuaciones con $q2^{p+1}$ incógnitas cuya matriz de los coeficientes tiene como determinante $(-1)^{q2^{p+1}+1}$ entonces el sistema resultante es compatible determinado para todo valor α . Además, la solución del sistema es distinta de la trivial, pues la columna de los términos independientes es no nula porque $x_1^* \neq x_2^* \neq \cdots \neq x_{q2^{p+1}}^*$.

La solución del sistema se obtiene de (7.31) invirtiendo directamente, y resulta:

$$\begin{pmatrix} A_1^* \\ A_2^* \\ \vdots \\ A_{q-1}^* \\ A_q^* \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} B_1 & L_1 & \cdots & O & O \\ O & B_2 & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \cdots & B_{q-1} & L_1 \\ L_1 & O & \cdots & O & B_q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ \vdots \\ C_{q-1}^* \\ C_q^* \end{pmatrix}$$

La inversión de la matriz lleva a la obtención de los valores A_i . Los valores de A_i se van a determinar empezando por A_2 , después A_3 , y así sucesivamente hasta llegar al valor de A_{q2p+1} y por último A_1 . Reordenando las filas, la solución se puede expresar

$$\begin{pmatrix} DA_1^* \\ DA_2^* \\ \vdots \\ DA_q^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & O & \cdots & O \\ O & E_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & E_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ \vdots \\ C_q^* \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

donde la matriz E_k $k = 1, \dots, q$, es

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ f'(x_2^*) & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ f'(x_2^*)f'(x_3^*) & f'(x_3^*) & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f'(x_2^*) \cdots f'(x_{2p}^*) & f'(x_3^*) \cdots f'(x_{2p}^*) & \cdots & f'(x_{2p}^*) & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f'(x_{2p+2}^*) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f'(x_{2p+2}^*)f'(x_{k2p+3}^*) & f'(x_{2p+3}^*) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f'(x_{2p+2}^*) \cdots f'(x_{2p+1}^*) & f'(x_{2p+3}^*) \cdots f'(x_{2p+1}^*) & \cdots & f'(x_{2p+1}^*) & 1 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que todos los E_k $j = 1, \dots, q$ son idénticos por lo tanto cuando se realiza la multiplicación por cajas la contribución que proviene de los E_k es la misma. La única diferencia esta en la columna de los términos independientes. Cada E_k tiene que multiplicar a los C_k^* y los C_k^* contienen

los mismos elementos desplazados 2^{p+1} . Teniendo estas consideraciones operando en (7.32) resulta:

$$A_{k2^{p+1}+i+1} = \begin{cases} \alpha \left(-x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \frac{1}{2} (x_{k2^{p+1}+i}^* + x_{k2^{p+1}+i+3}^*) \right) + \\ + \alpha \sum_{n=2}^i \left((-x_{k2^{p+1}+n}^* + \frac{1}{2} (x_{k2^{p+1}+n+1}^* + x_{k2^{p+1}+n-1}^*)) \prod_{l=n}^i f'(x_l^*) \right) & i = 2, \dots, 2^p \\ \\ \alpha \left(-x_{k2^{p+1}+i+1}^* + \frac{1}{2} (x_{k2^{p+1}+i}^* + x_{k2^{p+1}+i+3}^*) \right) + \\ + \alpha \sum_{n=2^p+2}^i \left((-x_{k2^{p+1}+n}^* + \frac{1}{2} (x_{k2^{p+1}+n+1}^* + x_{k2^{p+1}+n-1}^*)) \prod_{l=n}^i f'(x_l^*) \right) & i = 2^p + 2, \dots, 2^{p+1} \\ \\ \alpha \left(-x_{2+k2^{p+1}}^* + \frac{1}{2} (x_{k2^{p+1}+3}^* + x_{k2^{p+1}+1}^*) \right) & i = 1 \\ \\ \alpha \left(-x_{2^p+k2^{p+1}}^* + \frac{1}{2} (x_{2^p+k2^{p+1}+1}^* + x_{2^p+k2^{p+1}-1}^*) \right) & i = 2^p + 1 \end{cases}$$

$$k = 0, \dots, q-1 \quad \blacksquare$$

En conclusión, a orden ε todos los puntos que están contenidos dentro de una misma caja y cuya distancia entre ellos es menor que ε , podrían ser sustituidos por cualquier punto de la misma, por lo tanto a orden ε lo que se vería, al ir evolucionando el sistema, es los puntos saltando de una caja a otra (ya que los puntos dentro de la caja están tan cerca que no los distinguimos) y estaríamos observando una onda de periodo igual al número de cajas. En conclusión el acoplamiento se comporta como un ruido que no nos permite distinguir diferencias que sean más pequeñas que el término de acoplamiento.

Capítulo 8

CONCLUSIONES

A la hora de ordenar las conclusiones de la tesis queremos establecer dos niveles donde clasificar nuestros resultados.

i) El marco general.

Todos los teoremas se han enfocado en el marco más general posible, con la idea de suprimir limitaciones en los resultados y lograr soluciones lo más universales posibles. Ello ha sido posible porque

- La dinámica individual de los osciladores está gobernada por una función C^2 totalmente arbitraria.
- Los CML se han tratado con un número arbitrario de osciladores.
- El acoplamiento se ha estudiado en sus posibles variaciones.

ii) Los resultados propiamente dichos.

Hemos probado la existencia y hemos obtenido expresiones analíticas de aquellos fenómenos usualmente presentes en los CML: ondas viajeras, patterns, clustering y CDP. Así mismo hemos descubierto y caracterizado un nuevo fenómeno: las ondas asociadas a la CBS-N.

Expresamente nuestros objetivos han quedado plasmados en los siguientes resultados acerca de los CML:

- i) En el capítulo 3
- La existencia de estados sincronizados estacionarios: teoremas 1 y 6.
 - La existencia de sincronización periódica: teoremas 2 y 7.
 - La existencia de sincronización caótica: teoremas 3 y 8.
 - La CDP en la sincronización periódica: teoremas 4 y 9.
- ii) Para CML débilmente acoplados, se ha demostrado en el capítulo 4, los siguientes resultados:
- La existencia de ondas viajeras y su expresión analítica: teoremas 2 y 5.
 - La existencia de la bifurcación de duplicación de periodo de ondas viajeras y su expresión analítica: teoremas 3 y 6.
 - La CDP para las ondas viajeras y su expresión analítica: teoremas 4 y 7.
- iii) Se ha dado la expresión analítica de todas las soluciones, tanto de forma matricial, como se ha abordado en el capítulo 4, y alternativamente usando relaciones de recurrencia, tal como se ha mostrado en el capítulo 5.
- iv) Para cluster se han obtenido los siguientes resultados en el capítulo 6:
- La existencia de ondas viajeras y su expresión analítica: teoremas 1 y 4.
 - La existencia de la bifurcación de duplicación de periodo de ondas viajeras y su expresión analítica: teoremas 2 y 5.
 - La CDP para las ondas viajeras y su expresión analítica: teoremas 3 y 6.
- v) En el capítulo 7 se ha estudiado las órbitas asociadas a la CBS-N demostrando:
- La existencia de la órbita S-N y su expresión analítica: teoremas 1 y 4.
 - La existencia de la órbita asociada a la CBS-N y su expresión analítica: teoremas 2,3,5 y 6.

Capítulo 9

OTRAS PERSPECTIVAS

Los CML y su aplicación

En este apartado queremos indicar, brevemente, relaciones de nuestro trabajo con resultados hallados en CML que modelan la naturaleza. Sólo queremos llamar la atención sobre un par de puntos que podrían representar al día de hoy aspectos con una gran valor social o económico. El resto de aplicaciones ya se han ido desgranando a lo largo de las secciones.

Una de las motivaciones para modelar sistemas espacio-temporales con CML es simplificar el modelo y resolverlo, en vez de encarar los sistemas de ecuaciones diferenciales parciales que los gobiernan.

Esta es una importante razón para comprender las ondas viajeras y poder utilizarlas en la previsión a largo plazo del clima, como ya hemos comentado. Las ondas viajeras en CML fueron observadas originalmente por Kaneko [42, 44]. Más recientemente los investigadores han considerado un CML que permite modelar la fluctuación de parámetros locales para reproducir los fenómenos observados en la naturaleza [51]. De esta manera se permiten variaciones de los parámetros a lo largo de la red y se obtiene una mejor descripción de la naturaleza. Las ondas viajeras son comunes e importantes en los fenómenos atmosféricos, están asociadas a la interacción entre el océano y la atmósfera [17, 24]. En particular son bien conocidas las oscilaciones interanuales: El Niño, y la

oscilación del Atlántico Norte.

La sincronización entre sistemas caóticos ha recibido mucha atención en los últimos años. El principal resultado fue obtenido por Pecora y Carroll [59, 60], quienes encontraron que dos sistemas caóticos idénticos se podrían sincronizar si interactuaban entre ellos.

La primera descripción de sincronización, y además con elementos débilmente acoplados, fue dada por el físico holandés Huygens (1629-1695). En una carta dirigida a su padre relató como dos relojes de péndulo colgados en la misma pared, y dándose la espalda, sincronizaban sus movimientos. Este fenómeno es conocido como acoplamiento de frecuencia, y hoy día se utiliza ampliamente en circuitos electrónicos. Si los ingenieros diseñan sus circuitos de tal forma que queden modelados según los CML descritos en la tesis no sólo conseguirán sincronización sino que conocerán la solución explícita del sistema que los gobierna y su frecuencia.

Un caso límite de coherencia macroscópica es la sincronización global de todas las partes del sistema. Este fenómeno se ha observado en física, química y biología [19, 63]. Un ejemplo muy conocido, y llamativo, es la sincronización del destello de enjambres de luciérnagas [10, 57, 79], fácilmente extrapolable al comportamiento sincronizado de muchos animales, e incluso al comportamiento humano, cuando nos encontramos en grupo. Posiblemente los aplausos sean el fenómeno de sincronización más frecuente en los humanos, pero no el único. Es conocida la sincronización que se produjo en la inauguración de El Puente de El Milenium, en Londres [71]. Estas sincronizaciones en estructuras si coinciden con una resonancia de la misma son catastróficas, el hundimiento de las gradas en los estadios de fútbol (Estadio Fonte Nova, Brasil, 2007) al saltar los aficionados tienen este origen. En la historia económica reciente hemos visto una sincronización de ordenes de ventas en las bolsas mundiales, y otra sincronización por el pánico a perder los ahorros del banco.

Consecuencias y conexiones con otros trabajos de investigación.

Los resultados hallados en la tesis tienen las siguientes consecuencias y conexiones con otros trabajos.

i) Se ha mostrado la emergencia de las propiedades globales desde las propiedades locales. La dinámica global del sistema hereda la dinámica propia de cada oscilador: los puntos fijos del sistema son esencialmente los puntos fijos del mapa (que gobierna la dinámica de cada oscilador) compuesto consigo mismo $m2^k$ veces (m número de osciladores del CML). En particular, este resultado ha sido observado recientemente de forma numérica [58].

Nuestros resultados son una expresión analítica explícita de los resultados de Lemaitré y Chaté [48], que probaron, en CML, la traslación de las propiedades locales al nivel global.

ii) Los resultados analíticos obtenidos permitirán a los científicos fijar los parámetros para su observación experimental, los investigadores podrán reproducir tales comportamientos en sus sistemas de estudio, y utilizarlo como base para posteriores investigaciones, y a los ingenieros les permitirá diseñar sistemas con nuevas funciones y capacidades.

iii) Se ha estudiado la dinámica en CML, en los que la dinámica individual de cada oscilador está regida por una función unimodal arbitraria; en los escasos resultados analíticos que hay en la materia, normalmente se trabaja con funciones cuadráticas o lineales a trozos [5, 6, 49]. Nuestros resultados son una generalización, que permiten el cálculo de propiedades relacionadas con los estados y su evolución, es decir, mecánica estadística y valores macroscópicos medios a partir del comportamiento individual.

iv) Se evitan dos limitaciones presentes cuando se emplean técnicas numéricas:

1. Se eliminan los resultados espurios generados por la precisión finita en los cálculos numéricos [28, 83, 84].
2. Se pueden tomar límites tendiendo a infinito sobre las soluciones analíticas, tanto en el número de osciladores del CML como en el número de bifurcaciones en la cascada de duplicación de periodo.

La simulación numérica con un número de osciladores muy grande se vuelve prohibitiva en tiempo de computación según crece el número de osciladores. Por otra parte, como hemos indicado en la introducción, el estudio de la transición a la turbulencia en fluidos, para ser entendido adecuadamente necesita que el número de osciladores sea cuanto más grande mejor. Consecuencia directa de la toma del límite en la cascada de duplicación de periodo, es la existencia de ondas de periodo arbitrario, tendiendo a infinito, según se acerque el parámetro de bifurcación al punto de Myrberg-Feigenbaum. Esto es una respuesta afirmativa a la pregunta establecida por Gade y Amritkar en su trabajo [22] cuando encontraron una cascada de duplicación de periodo. Otra pregunta que se hicieron Gade y Amritkar en su trabajo es si existe más de un valor del parámetro tal que tendiendo a él entonces el periodo de la onda viajera tienda a infinito. La respuesta es afirmativa, de hecho hay infinitos valores, son los correspondientes puntos de Myrberg-Feigenbaum de las ventanas periódicas dentro de la ventana canónica. La posición de esos valores está determinada por las cascadas de bifurcaciones saddle-node [66] y la relación entre la cascada de duplicación de periodo y las cascadas de bifurcaciones saddle-node también está determinada [67].

Investigaciones futuras

Los escasos resultados teóricos en el área de CML precedentes a nuestro trabajo, y los abundantes resultados teóricos de nuestra tesis en CML débilmente acoplados, nos sitúan en una buena posición para abordar problemas concomitantes. Los problemas relacionados los podríamos clasificar según el siguiente esquema:

i) CML forzados.

Los sistemas sometidos a fuerzas externas son comunes en ciencias, además de fundamentales, y representa un campo muy novedoso en este área [7, 25]. Tratar CML débilmente acoplados sometidos a forzantes pequeñas, que se puedan abordar perturbativamente, sería nuestra primera aproximación al problema.

ii) CML heterogéneos.

En todo nuestro estudio, las funciones que describían la dinámica individual de cada oscilador eran las mismas: era una dinámica homogénea. Surge la pregunta de cómo se comportará el sistema si es heterogénea. Dentro de esta heterogeneidad queremos centrarnos, trabajando con una misma función, en dos aspectos,

- CML débilmente heterogéneos.

Cada oscilador está regido por la misma función, pero con valores del parámetro de control ligeramente distintos que no producen cambios topológicos. Encararemos este proceso por métodos perturbativos.

- CML fuertemente heterogéneos.

Los osciladores están regidos por la misma función, pero para distintos valores de parámetros de control y que además generan cambios topológicos. Hoy día no sabemos que técnicas analíticas utilizar para abordar este problema. Somos conscientes de que el problema de CML forzado está relacionado con éste, cuando la forzante induzca cambios topológicos. Sin duda alguna será el campo de investigación más desafiante.

iii) CML asíncronos.

Nuestro trabajo se ha realizado con CML síncronos, hemos dejado fuera a la mitad de la familia. Habría que estudiar la extensión de los resultados a los CML asíncronos. Los resultados en ecuaciones diferenciales con retraso son una guía de posibles fenómenos que cabe esperar [9, 11].

iv) Evolución de las soluciones perturbadas del CML

En la tesis hemos encontrado diversas soluciones periódicas y sus cascadas de duplicación, tanto para osciladores individuales como cluster de ellos. Una pregunta importante es cómo evoluciona el CML cuando se encuentra próximo a una de estas soluciones. Saber como va a evolucionar hasta converger a ella (si la solución es estable) o como diverge inicialmente (si

la solución es inestable). La solución a este problema viene dada por las permutaciones de ordenamiento cardinal [68] y su representación matricial, las cuales indican como se visitan las diversas ramas de la cascada de duplicación con cada iterado.

v) Aplicaciones

Hemos comentado que los CML se han utilizado en diversas ramas del saber humano: física, química, biología, ciencias sociales. No obstante las aplicaciones de los CML son muy variadas y van más allá de los modelos clásicos. Así los encontramos, por citar sólo algunos, en neurociencias [7, 25, 62], encriptación [50, 55, 82, 85], mercado de valores [75], teoría cuántica [54], meteorología [27], genética [16]. Con el transcurso del tiempo su uso se hace más común. Habrá que ver que aportan los teorema de existencia así como sus soluciones, a los campos mencionados y a sus aplicaciones, así como los rangos de parámetros donde son válidos. El hecho de que los investigadores sepan que comportamiento esperar en sus modelos y para qué rango de valores les indicará si es correcto su proceso de modelado.

Una herramienta imprescindible para acercarse a estas nuevas áreas será la simulación numérica que nos indicará que nuevos fenómenos se van a observar y en que rango de valores.

Algunas consideraciones finales

Los CML no son, ni pretenden ser, la herramienta universal que lo explique todo. Son una herramienta más en nuestro camino para comprender el mundo que nos rodea, una herramienta que se ensambla en el conjunto de herramientas como una tesela más para una mejor comprensión de los fenómenos que estudiamos.

Todas las herramientas tienen sus puntos fuertes y débiles, su ámbito de aplicación reducido, y deben relacionarse con las demás para tener una visión global. Desde un punto de vista positivo un CML deducido de una ecuación diferencial nos va a permitir un abordaje analítico más sencillo, y desde el punto de vista negativo sus soluciones analíticas y numéricas serán una aproximación mejor o peor a las ecuaciones diferenciales que aproxima. Por lo tanto debemos ver el CML en su

contexto, y aunque en su forma débil la solución analítica o numérica no será totalmente correcta estará indicando al estudioso de la ecuación diferencial, qué posibles soluciones, comportamientos o bifurcaciones presenta, así como el rango de parámetros donde encontrarlos. Para el análisis numérico esto es extraordinariamente importante, ya que cada integración se hace para unos parámetros fijos; parámetros que al fijar el investigador han podido pasar por alto hechos importantes.

Para el tratamiento analítico no son menos importantes estos hechos. Conocer qué tipo de soluciones se pueden dar y para qué tipo de parámetros facilitan su solución. No es lo mismo buscar la solución de un problema del que no se sabe si la tiene, a buscarla siendo consciente de que existe. No es lo mismo saber que navegando hacia el oeste se llegará a América a no saber si hay tierra más allá del horizonte. La fecundación de los CML al estudio analítico y numérico también se da en sentido inverso. La multitud de resultados numéricos nos permitieron saber que había que buscar, sin ellos estaríamos todavía perdidos sin saber que buscar. Las soluciones de las ecuaciones diferenciales, a su vez, nos indicaban determinados comportamientos que cabría esperar.

Los teoremas de no existencia juegan también un papel importante ya que si la solución no existiera un investigador podría preguntarse sobre su existencia e iterar el CML en un ordenador, obviamente sin obtener el resultado. El investigador podría perder muchísimo tiempo cambiando las condiciones iniciales intentado probar la existencia de tales fenómenos. De igual manera, el estudioso de las ecuaciones diferenciales sabe que determinados comportamientos no se van a producir, lo que facilita su línea de investigación y abre las siempre importantes cuestiones de por qué un comportamiento existe y otros no siendo similares.

Son estas reflexiones las que representan las teselas del conocimiento mencionadas más arriba. Los campos de conocimiento son tan vastos que debemos especializarnos, pero la comunicación entre científicos nos permite ver otros puntos de vista que engrandecen al nuestro y recordarnos siempre lo poco que sabemos y el mucho trabajo que queda por delante.

Bibliografía

- [1] Special issue. *Chaos*, 1992.
- [2] Special issue. *Physica D*, 1997.
- [3] Pattern formation outside of equilibrium. *Rew. Mod. Phys.*, 65:851–1112, 1993.
- [4] L. Angeline. Antiferromagnetic effects in chaotic map lattices with a conservation law. *Physics letters A*, 307:41–49, 2003.
- [5] C. Anteneodo, S.E. de S. Pinto, A.M. Batista, and R. L. Viana. Analytical results for coupled map lattices with long-range interactions. *Physical review E*, 68:045202, 2003.
- [6] H. Atmanspacher and H. Scheingraber. Inherent global stabilization of unstable local behavior in coupled map lattices. *International journal of bifurcation and chaos*, 15:1665–1676, 2005.
- [7] A.M. Batista and R.L. Viana. Short-term memories in lattices of inductively coupled ac-driven circuits. *Physica A*, 303:410–420, 2002.
- [8] A. Bevers and C. H. Flather. Numerically exploring habitat fragmentation effects on populations using cell-based coupled map lattices. *Theoretical Population Biology*, 55:61–76, 1999.
- [9] M. Bonnin. Waves and patterns in ring lattices with delays. *Physica D*, 238:77–87, 2009.
- [10] J. Buck. Synchronous rhythmic flashing of fireflies. *The Quarterly Review of Biology*, 63:265–289, 1988.

- [11] S.A. Campbell, I. Ncube, and J. Wu. Multistability and stable asynchronous periodic oscillations in a multiple-delayed neural system. *Physica D*, 212:101–119, 2006.
- [12] H. Chate and P. Manneville. Spatio-temporal intermittency in coupled map lattices. *Physica D*, 32:409–422, 1988.
- [13] N. Chatterjee and N. Gupte. Synchronicity in coupled sine circle maps some numerical result. *Physica A*, 224:422–432, 1996.
- [14] N. Chatterjee and N. Gupte. Synchronization in coupled sine circle maps. *Physical Review E*, 53:4457–4466, 1996.
- [15] J. R. Chazottes and B. Fernandez. *Dynamics of Coupled Map Lattices and of Related Spatially Extended Systems*. Springer, Berlin Heidelberg, 2005.
- [16] G. Cocho and G. Martínez-Mekler. On a coupled map lattice formulation of the evolution of genetic sequences. *Physica D:Nonlinear Phenomena*, 51:119–130, 1991.
- [17] J. Corte-Real, X. Wang, and X. Zhang. Theoretical and applied climatology. 50:113, 1995.
- [18] P.J. Davis. *Circulant matrices*. Chelsea, 1994.
- [19] J. C. A. de Pontes, A. M. Batista, R. L. Viana, and S. R. Lopes. Self-organized memories in coupled map lattices. *Physica A*, 368:387–398, 2006.
- [20] M.J. Feigenbaum. The universal metric properties of nonlinear transformation. *Journal of statistical physics*, 21:669–706, 1979.
- [21] M.J. Feigenbaum. Quantitative universal for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statical Physics*, 19:25–52, 1978.
- [22] P. M. Gade and R. E. Amritkar. Wavelength-doubling bifurcations in one-dimensional coupled logistic maps. *Physical review E*, 49:2617–2622, 1994.

- [23] P. M. Gade and R. E. Amritkar. Wavelength doubling bifurcations in coupled map lattices. *Physical Review Letters*, 70:22, 1993.
- [24] A. E. Gill. *Atmospheres-Ocean Dynamics*. Academic, NY, 1982.
- [25] S.L. Ginzburg and V.I. Sbitnev. Spatiotemporal chaos in a 2d coupled map lattice with pinning-like force. *Physica D*, 132:87–89, 1999.
- [26] P. Grassberger and T. Schreiber. Phase transitions in coupled map lattices. *Physica D:Nonlinear Phenomena*, 50:177–188, 1991.
- [27] J. Gravner and D. Griffeath. Modeling snow crystal growth ii: A mesoscopic lattice map with plausible dynamics. *Physica D*, 237:385–404, 2007.
- [28] C. Grebogi, S. M. Hammel, J. A. Yorke, and T. Sauer. Shadowing of physical trajectories in chaotic dynamics:containment and refinement. *Physical review letters*, 65:1527–1530, 1990.
- [29] J.L. Guisado, F. Jiménez-Morales, and J. M. Guerra. Cellular automaton model for the simulation of laser dynamics. *Physical Review E*, 67:066708, 2003.
- [30] L.Z. Guo and S. A. Billings. Detection of fatigue cracks in a beam using a spatio-temporal dynamical system identification method. *Journal of Sound and Vibration*, 299:22–35, 2007.
- [31] A. V. Holden, M.J. Poole, J. V. Tucker, and H. Zhang. Coupling cmls and the synchronization of a multilayer neural computing system. *Chaos Solitons and Fractals*, 4:2249–2268, 1994.
- [32] T. Hoyle. The digestive system: linking theory and practice. *Br J Nurs.*, 6:1285–91, 1997.
- [33] B.R. Hunt, J.A. C. Gallas, C. Grebogi, J. A. Yorke, and H. Kocak. Bifurcation rigidity. *Physica D*, 129:35–36, 1999.
- [34] R. L. Hutto. Foraging behavior patterns suggest a possible cost associated with participation in mixed-species bird flocks. 1998.

- [35] K. Kaneko. Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in network of chaotic elements. *Physica D*, 41:131–172, 1990.
- [36] K. Kaneko. Globally coupled chaos violates law of large numbers. *Phys. Rev. Lett.*, 65:1391–1394, 1990.
- [37] K. Kaneko. Globally coupled circle maps. *Physica D*, 54:5–19, 1991.
- [38] K. Kaneko. Chaotic but regular posi-nega switch among coded attractors by cluster size variation. *Phys. Rev. Lett*, 63:219–224, 1989.
- [39] K. Kaneko. Partition complexity in network of chaotic elements. *J. Phys. A*, D:5–19, 1991.
- [40] K. Kaneko. Coupled maps with growth and death: An approach to cell differentiation. *Physica D:Nonlinear Phenomena*, 103:505–527, 1997.
- [41] K. Kaneko. Relevance of dynamic clustering to biological networks. *Physica D:Nonlinear Phenomena*, 75:55–73, 1994.
- [42] K. Kaneko. Period-doubling of kink-antikink patterns, quasi-periodicity in antiferro-like structures and spatial intermittency in coupled map lattices toward a prelude to a "field theory of chaos". *Progress of Theoretical Physics*, 72:3, 1984.
- [43] K. Kaneko. *Theory and applications of coupled map lattices*. 1993.
- [44] K. Kaneko. Spatial period-doubling in open flow. *Physics Letters*, 111A:321–325, 1985.
- [45] B. S. Kerner and P. Konhäuser. The nonlinear theory of the cluster effect in a traffic flow. *Physical Review E*, 48:2335, 1993.
- [46] H. Kook, F. H. Ling, and Schmit G. Universal behavior of coupled nonlinear systems. *Physical Review A*, 43:2700–2708, 1991.
- [47] A. Kraskov, T. Kreuz, and P. Grassberger. Estimating nonlinear interdependences in dynamical systems using cellular nonlinear networks. *Physical Review E*, 65:410, 2001.

- [48] A. Lemaître and H. Chaté. Nonperturbative renormalization group for chaotic coupled map lattices. *Physical review letter*, 80:5528–5531, 1998.
- [49] P. Li, Z. Li, W. A. Halang, and G. Chen. Li-yorke chaos in a spatiotemporal chaotic system. *Chaos solitons and fractals*, 33:335–341, 2007.
- [50] P. Li, Z. Li, W. A. Halang, and G. Chen. A stream cipher based on a spatiotemporal chaotic system. *Chaos, Solitons and Fractals*, 32:1867–1876, 2007.
- [51] P. Link, J. Corte-Real, and J. A. C. Gallas. Traveling waves induced by parameter fluctuations in rings of coupled maps. *Physica A*, 295:297–300, 2001.
- [52] K. B. Lipkowitz and T. R. Larter, R.and Cundari. *Reviews in computational chemistry volume 20*. John Wiley and Sons, New Jersey, 2004.
- [53] Z. Liu, S. Chen, and B. Hu. Coupled synchronization of spatiotemporal chaos. *Physical Review E*, 59:3, 1999.
- [54] M. Maher and C. Beck. Chaotic quantization and the mass spectrum of fermions. *Chaos solitons and fractals*, 37:9–15, 2008.
- [55] S. Mazloom and A. M. Eftekhari-Moghadam. Color image encryption based on coupled non-linear chaotic map. *Chaos, Solitons and Fractals*, 42:1745–1754, 2009.
- [56] M. Metha and S. Sinha. Asynchronous updating of coupled maps leads to synchronization. *Chaos*, 10:350–358, 2000.
- [57] R. E. Mirollo and S. H. Strogatz. Synchronization of pulse-coupled biological oscillators. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 50:1645–1663, 1990.
- [58] P. Palaniyandi, P. Murugannandam, and M. Lakshmanan. Coexistence of synchronized and desynchronized patterns in coupled chaotic dynamical systems. *Chaos solitons and fractals*, 36:991–1018, 2008.

- [59] L. M. Pecora and T. L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 64:821–824, 1990.
- [60] L. M. Pecora and T. L. Carroll. Driving systems with chaotic signals. *Physical Review A*, 44: 2374–2383, 1991.
- [61] Y. B. Pesin and A. A. Yurchenko. Some physical models of the reaction-diffusion equation, and coupled map lattices. *Russ. Math. Surv.*, 59:481–513, 2004.
- [62] J.C.A. Pontes, A.M. Batista, and R.L. Viana. Short-term memories with a stochastic perturbation. *Chaos solitons and fractals*, 23:1689–1694, 2005.
- [63] M. J. Poole, A. V. Holden, and H. V. Tucker. Hierarchical reconstructions of cardiac tissue. *Chaos, Solitons and Fractals*, 13:1581–1612, 2002.
- [64] O. Popovych, A. Pikovsky, and Yu. Maistrenko. Cluster-splitting bifurcation in a system of coupled maps. *Physica D*, 168:106–125, 2002.
- [65] G. Rangarajan and M. Ding. Stability of synchronized chaos in coupled dynamical systems. *Physics Letters A*, 296:204–209, 2002.
- [66] J. San Martín. Intermittency cascade. *Chaos solitons and fractals*, 32:816–831, 2007.
- [67] J. San Martín and D. Rodríguez-Pérez. Conjugation of cascades. *Chaos solitons and fractals*, 39:666–681.
- [68] J. San Martín, M. J. Moscoso, and A. González. The universal cardinal ordering of fixed points. *Chaos Solitons and Fractals*, 42:1996–2007, 2009.
- [69] A. M. Santos dos, R. L. Viana, S. R. Lopes, S. E. de S. Pinto, and A. M. Batista. Chaos synchronization in a lattice of piecewise linear maps with regular and random couplings. *Physica A*, 367:145–157, 2006.

- [70] H. T. Siegelmann and S. Fishman. Analog computation with dynamical systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 120:214–235, 1998.
- [71] S.H. Strogatz, D. M. Abrams, A. McRobie, B. Eckhardt, and E. Ott. Theoretical mechanics: Crowd synchrony on the millennium bridge. *Nature*, 438:43–44, 2005.
- [72] F. Stuart. *Human Physiology*. McGraw-Hill, London, 2008.
- [73] J. R. Sánchez, J. González-Estévez, R. López-Ruiz, and M. G. Cosenza. A model of coupled maps for economic dynamics. *European Physical Journal Special Topics*, 143:241–243, 2007.
- [74] J. Terborgh. Mixed flocks and polyspecific associations: Costs and benefits of mixed groups to birds and monkeys. *American Journal of Primatology*, 21:87–100, 2005.
- [75] C. Tsallis, A.M.C. Souza, and E.M.F. Curado. Stock exchange: A statical model. *Chaos, solitons and fractals*, 6:561–567, 1995.
- [76] A. Turing. The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical transactions of the Royal Society of London-Series A-Mathematical and Physical Sciences*, 237:37–72, 1952.
- [77] R. Viana and A. M. Batista. Synchronization of coupled kicked limit cycle systems. *Chaos Solitons and Fractals*, 9:1931–1944, 1998.
- [78] F. H. Willeboordse. Selection of windows, attractors and self-similar patterns in a coupled map lattice. *Chaos solitons and fractals*, 2:609–634, 1992.
- [79] A. T. Winfree. *The geometry of Biological Times*. Springer, New York, 1980.
- [80] T. Yanagita and K. Kaneko. Rayleigh-bérnard convection patterns, chaos spatiotemporal chaos and turbulence. *Physica D:Nonlinear Phenomena*, 82:288–313, 1995.
- [81] Q-H. Zhang and T-D. Miao. Surface waves in aeolian bedforms. *Physics letters A*, 372:3429–3433, 2008.

- [82] M-C. Zhao, K-Z. Li, and X-C. Fu. Modified one-way coupled map lattices as communication cryptosystems. *Chaos solitons and fractals*, 42:286–290, 2009.
- [83] C. Zhou and J. Kurths. Noise-induced phase synchronization and synchronization transitions in chaotic oscillators. *Physical review letters*, 88:230602, 2002.
- [84] C. Zhou and C-H. Lai. Analysis of spurious synchronization with positive conditional lyapunov exponents in computer simulations. *Physica D*, 135:1–23, 2000.
- [85] J. Zhou, W. Pei, K. Wang, J. Huang, and Z. He. Secure communication scheme based on asymptotic model of deterministic randomness. *Physics Letters A*, 358:283–288, 2006.